

## Metodologias Bayesianas de actualização em avaliações estruturais



**Luciano Jacinto<sup>1</sup>**



**Luís Canhoto  
Neves<sup>2</sup>**



**Luís Oliveira  
Santos<sup>3</sup>**

### RESUMO

As metodologias probabilísticas têm sido consideradas como sendo as mais adequadas na avaliação da segurança de estruturas existentes. Dentro das metodologias probabilísticas, as metodologias Bayesianas surgem como ferramentas muito valiosas na medida em que permitem actualizar modelos probabilísticos quando informações novas se tornam disponíveis, sem ignorar qualquer informação relevante existente. As metodologias Bayesianas permitem, desta forma, integrar os dois tipos de informação, a nova (também chamada informação *à posteriori*) e a informação existente (também chamada informação *à priori*).

Nesta comunicação propõe-se aplicar estas metodologias ao caso específico em que a informação nova é do tipo amostral e o modelo probabilístico a actualizar é do tipo Normal. Conforme se sabe, para que seja possível actualizar a distribuição de probabilidade de uma variável aleatória, é necessário assumir que pelo menos um dos parâmetros da sua distribuição é, ele próprio, variável aleatória. No caso específico de modelos normais, a distribuição é descrita por dois parâmetros que coincidem com os dois primeiros momentos (a média e a variância). Através dum exemplo, analisam-se as implicações de se admitir que apenas a média é aleatória e de se admitir que tanto a média como a variância são aleatórias.

O exemplo apresentado diz respeito à determinação da distribuição de probabilidade do momento resistente da secção do tabuleiro de um viaduto. A distribuição de probabilidade, e em particular os resumos estatísticos, serão avaliados através do método de Monte Carlo e a variável aleatória que será objecto de actualização será a resistência do aço de pré-esforço. Considerar-se-á que a informação probabilística existente é a que consta no projecto, complementada com as recomendações da regulamentação existente, e a informação adicional é a que é possível colher dos registos de obra, em particular os registos relativos às características técnicas das bobines empregues.

### PALAVRAS-CHAVE

Bayes, actualização, Monte Carlo, variável aleatória.

<sup>1</sup> Instituto Superior de Engenharia de Lisboa, Departamento de Eng.<sup>a</sup> Civil, 1959-007 Lisboa. ljacinto@dec.isel.ipl.pt

<sup>2</sup> Faculdade de Ciência e Tecnologia da UNL, Departamento de Eng.<sup>a</sup> Civil, 2829-516 Caparica. luis.neves@fct.unl.pt

<sup>3</sup> Laboratório Nacional de Engenharia Civil, NOE-Departamento de Estruturas, 1700-066 Lisboa. luis.osantos@lnec.pt

## 1. INTRODUÇÃO

As metodologias probabilísticas Bayesianas têm enorme potencial no campo da avaliação da segurança de estruturas existentes na medida em que permitem actualizar modelos probabilísticos quando informações novas se tornam disponíveis, nomeadamente as que se obtêm através de inspecções, ensaios não destrutivos e consulta de registos de obra. Uma das virtudes da abordagem Bayesiana é que se existir informação anterior relevante ela é tida devidamente em conta.

A metodologia Bayesiana a utilizar depende do tipo de informação adicional. Analisa-se o caso em que essa informação é do tipo amostral. Começa-se por analisar o caso geral, aplicando depois a formulação geral ao caso específico de variáveis com distribuição normal.

## 2. CASO GERAL

Seja  $X$  uma  $va$  (variável aleatória) contínua com  $f_{dp}$  (função densidade de probabilidade)  $f(x|\theta)$  com  $\theta$  um parâmetro também considerado como  $va^*$ . O vector  $(X, \theta)$  constitui assim um vector aleatório, cuja  $f_{dp}$  conjunta denota-se por  $f(x, \theta)$ . A  $f_{dp}$  marginal de  $X$  será representada por  $f(x)$  e a marginal de  $\theta$  por  $f(\theta)$ .

A distribuição de  $\theta$  condicional a um valor particular de  $X$ , digamos  $X = x$  é, por definição:

$$f(\theta|x) = \frac{f(x, \theta)}{f(x)} \quad (1)$$

Da mesma forma, por definição:

$$f(x|\theta) = \frac{f(x, \theta)}{f(\theta)} \Leftrightarrow f(x, \theta) = f(x|\theta)f(\theta) \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1) tem-se:

$$f(\theta|x) = [f(x)]^{-1} f(x|\theta)f(\theta) \quad (3)$$

Esta expressão, que não é mais do que o teorema de Bayes aplicado a densidades, pode ser interpretada assim: Supõe-se conhecida a distribuição  $f(\theta)$ , designada por distribuição *à priori*. Entretanto observou-se  $X = x$  (ou se preferirmos  $X = x_1$ ). Conhecida esta observação, a Eq. (3) permite actualizar a distribuição de  $\theta$ , denotada por  $f(\theta|x)$  e designada distribuição *à posteriori*. Note-se que na expressão (3)  $x$  representa um valor particular, ou uma constante, pelo que  $[f(x)]^{-1}$  é também uma constante, podendo escrever-se:

$$f(\theta|x) \propto f(x|\theta)f(\theta), \text{ onde o símbolo } \propto \text{ indica proporcionalidade} \quad (4)$$

No caso de se tornar disponível não uma única observação de  $X$  mas uma amostra de dimensão  $n$ , digamos  $\varepsilon = \{x_1, \dots, x_n\}$ , a distribuição *à posteriori* de  $\theta$ , denotada agora por  $f(\theta|\varepsilon)$ , obtém-se muito facilmente por um raciocínio semelhante ao anterior:

$$f(\theta|\varepsilon) \propto L(\theta|\varepsilon)f(\theta) \quad (5)$$

onde  $L(\theta|\varepsilon)$  representa a conhecida função verossimilhança, definida por:

$$L(\theta|\varepsilon) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) \quad (6)$$

Quando não existir informação *à priori* relevante, a distribuição escolhida para  $f(\theta)$  será uma distribuição do tipo não informativo [1]. Se pelo contrário, a informação *à priori* é relevante, como

---

\* No caso de existir mais do que um parâmetro, a variável  $\theta$  deve ser encarada como um vector, i.e.,  $\theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots\}$

acontece por exemplo quando existe experiência acumulada sobre o fenómeno em estudo, é usual adoptar-se para  $f(\theta)$  uma família especial, escolhida de tal maneira que  $f(\theta)$  e  $f(\theta|\varepsilon)$  pertençam à mesma família. Na terminologia Bayesiana diz-se que essa família é a conjugada natural da distribuição  $f(x|\theta)$  [1, 2, 3].

Voltemos ao vector aleatório  $(X, \theta)$  com *fdp* conjunta  $f(x, \theta)$ . Desta distribuição conjunta pode extrair-se a marginal de  $X$ , que por definição é dada por:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, \theta) d\theta.$$

Substituindo nesta equação a Eq.(2), a marginal de  $X$  toma a forma:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x|\theta) f(\theta) d\theta \quad (7)$$

Na terminologia Bayesiana a distribuição marginal de  $X$  é frequentemente denominada de distribuição preditiva de  $X$ . Na Eq. (7) usou-se a distribuição *à priori* de  $\theta$ , e por isso  $f(x)$  é chamada de preditiva *à priori*. A distribuição preditiva *à posteriori*, denotada coerentemente por  $f(x|\varepsilon)$ , é naturalmente dada por:

$$f(x|\varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x|\theta) f(\theta|\varepsilon) d\theta \quad (8)$$

Quando se utiliza para  $\theta$  uma distribuição não informativa, a distribuição  $f(\theta|\varepsilon)$  designa-se por distribuição *à posteriori* de referência e a distribuição  $f(x|\varepsilon)$  designa-se por preditiva de referência [2]. Por conseguinte, quando  $f(\theta)$  é do tipo não informativo, a preditiva de referência só utiliza informação amostral e os resultados obtidos são comparáveis (daí a designação referência) aos resultados da Estatística Clássica, que, recorde-se, só utiliza informação amostral. De seguida aplicaremos as formulações acima ao caso de modelos normais, muito comuns em aplicações de engenharia, e não só.

### 3. ACTUALIZAÇÃO DE MODELOS NORMAIS

#### 3.1 Descrição do modelo

Seja  $X$  uma variável aleatória normalmente distribuída com média  $\mu$  e precisão  $\lambda$ . A precisão, recorde-se, é definida como o inverso da variância, isto é,  $\lambda = 1/\sigma^2$ . A função densidade de probabilidade de  $X$ , expressa em termos da precisão, tem a forma:

$$f(x|\mu, \lambda) = \text{normal}(\mu, \lambda) = c \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\lambda(x-\mu)^2\right] \quad \text{com } c = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{1/2} \quad (9)$$

Os momentos são:  $E[X|\mu, \lambda] = \mu$  e  $V[X|\mu, \lambda] = 1/\lambda$

Chama-se à atenção para a notação utilizada. As *va*  $(X|\mu, \lambda)$ ,  $(X)$  e  $(X|\varepsilon)$ , pese embora o facto de se referirem à mesma população, possuem distribuições de probabilidade distintas.

Para que seja possível actualizar a distribuição de  $X$  é necessário considerar que pelo menos um dos parâmetros é aleatório. Consideraremos em primeiro lugar o caso em que a média  $\mu$  é aleatória e a precisão é fixa e igual a  $\lambda$ .

### 3.2 Análise considerando média aleatória e precisão fixa

**Distribuições conjugada natural e preditiva:** Demonstra-se que a distribuição conjugada natural da família Normal quando a precisão é fixa é a própria distribuição Normal. Constata-se também que a preditiva de  $X$  continua a ser do tipo Normal. Um outro resultado interessante é que a variância de  $X$  é exactamente igual à soma da variância de  $(X | \mu, \lambda)$  com a variância de  $\mu$ , ou seja,  $V[X] = V[X | \mu, \lambda] + V[\mu]$ .

**Preditiva à priori:** Admita-se que a precisão de  $(X | \mu, \lambda)$  é fixa e igual a  $\lambda$ . Admita-se ainda que à priori a média e a precisão de  $\mu$  são, respectivamente,  $\mu_0$  e  $\lambda_0$ , ou seja,  $f(\mu) = \text{normal}(\mu_0, \lambda_0)$ . Defina-se o parâmetro  $n_0 = \lambda_0/\lambda$ , usualmente designado por dimensão da amostra equivalente à priori. Aplicando a Eq. (7) pode demonstrar-se que a distribuição preditiva de  $X$  é dada por [2]:

$$f(x) = \text{normal}\left(\mu_0, \frac{n_0}{n_0 + 1} \lambda\right) \quad (10)$$

A equação acima mostra que a definição do modelo à priori requer a especificação de 3 parâmetros  $(\mu_0, n_0, \lambda)$ .

**Preditiva à posteriori:** Suponha-se agora que se tornou disponível uma amostra de  $X$  de dimensão  $n$ , a saber,  $\varepsilon = \{x_1, \dots, x_n\}$ . A aplicação da equação (8) conduz ao seguinte resultado [2]:

$$f(x | \varepsilon) = \text{normal}\left(\mu_n, \frac{n_0 + n}{n_0 + n + 1} \lambda\right) \quad \text{onde:} \quad (11)$$

$$\mu_n = \frac{n_0 \mu_0 + n \bar{x}}{n_0 + n} \quad \text{e} \quad \bar{x} = (1/n) \sum_1^n x_i, \quad (12)$$

Verifica-se assim que a média de  $(X | \varepsilon)$  é uma média ponderada entre a média à priori e a média amostral, e os coeficientes de ponderação são, respectivamente, a dimensão da amostra  $\varepsilon$  e a dimensão da amostra equivalente à priori. Se a informação à priori for de facto do tipo amostral o parâmetro  $n_0$  está automaticamente definido. Se não, é necessário atribuir-lhe um valor, eventualmente de forma subjectiva, dependendo da confiança relativa que se tem nos dois tipos de informação. Se a confiança que se tem em ambas for idêntica consideraríamos  $n_0 = n$ . Se a confiança que se tiver na amostra  $\varepsilon$  for, digamos, o dobro da confiança na informação à priori, tomaríamos  $n_0 = n/2$ , e assim sucessivamente.

**Preditiva de referência:** Quando a informação existente é pouco relevante, por ser escassa ou demasiado vaga, utiliza-se, como vimos, uma distribuição do tipo não informativo. No presente caso, a distribuição não informativa usual para  $\mu$  é a chamada distribuição difusa [4], isto é,  $f(\mu) = \text{constante}$ . A aplicação da Eqs. (5) e (8) conduz à seguinte distribuição [2]:

$$f(x | \varepsilon) = \text{normal}\left(\bar{x}, \frac{n}{n + 1} \lambda\right) \quad (13)$$

É interessante notar que esta distribuição constitui um caso particular de (11) fazendo  $n_0 = 0$ . Ou seja, quando não existe informação à priori relevante, tal situação é equivalente a considerar-se que a amostra equivalente à priori tem dimensão nula. Repare-se ainda que o caso que se está a analisar (precisão conhecida) não permite extrair toda a informação contida na amostra  $\varepsilon$ . Efectivamente só se está a utilizar duas estatísticas, a dimensão da amostra  $n$ , e a média amostral  $\bar{x}$ . A variância amostral,  $s^2$ , só será utilizada quando se considera que tanto  $\mu$  como  $\lambda$  são incertos, caso a analisar de seguida.

### 3.3 Análise considerando média e precisão aleatórias

**Distribuições conjugada natural e preditiva:** A distribuição conjugada natural para o vector  $(\mu, \lambda)$  consiste numa mistura entre a distribuição normal e a distribuição gama [1], ficando implícito que os parâmetros  $\mu$  e  $\lambda$  são dependentes. A distribuição (preditiva) resultante de  $X$  é uma t-Student. Recorde-se que no caso anterior em que se assumiu  $\lambda$  fixo, a preditiva de  $X$  era normal.

**Preditiva à priori:** Da distribuição conjunta mencionada acima (mistura entre uma normal e uma gama) é possível extrair as marginais de  $\mu$  e  $\lambda$ . A marginal de  $\lambda$  é uma gama, que, função dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  (parâmetros à priori) tem a seguinte expressão:

$$f(\lambda) = \text{gama}(\alpha, \beta) = c \cdot \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda} \quad (c - \text{constante de normalização}) \quad (14)$$

cujos momentos são:  $E[\lambda] = \alpha/\beta$  e  $V[\lambda] = \alpha/\beta^2$ .

A marginal de  $\mu$  é uma t-Student que depende dos mesmos  $\alpha$  e  $\beta$  anteriores (daí a dependência referida acima) e ainda de dois outros parâmetros,  $\mu_0$  e  $n_0$ , cujos significados são idênticos aos considerados na sub-seção anterior, isto é  $\mu_0$  representa a média de  $\mu$  à priori e  $n_0$  (parâmetro adimensional) representa a dimensão da amostra equivalente à priori.

A distribuição preditiva à priori de  $X$  tem a seguinte expressão [2]:

$$f(x) = \text{t-Student}\left(\mu_0, \frac{n_0}{n_0+1} \frac{\alpha}{\beta}, 2\alpha\right) \quad (15)$$

cujos momentos são:

$$E[X] = \mu_0; \quad V[X] = \frac{n_0+1}{n_0} \frac{\beta}{\alpha-1} \quad (16)$$

Assim, a informação à priori (se existir e se for relevante) é materializada em 4 parâmetros:  $\mu_0$ ,  $n_0$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ .

**Preditiva à posteriori:** Suponha-se agora que se tornou disponível uma amostra de dimensão  $n$ , a saber,  $\varepsilon = \{x_1, \dots, x_n\}$ . Esta amostra permite actualizar a distribuição de  $X$ , dando lugar à  $va X|\varepsilon$ , cuja distribuição é dada por [2]:

$$f(x|\varepsilon) = \text{t-Student}\left(\mu_n, \frac{n+n_0}{n+n_0+1} \frac{\alpha+n/2}{\beta_n}, 2\alpha+n\right) \quad \text{onde:} \quad (17)$$

$$\mu_n = \frac{n_0\mu_0 + n\bar{x}}{n_0+n}; \quad \beta_n = \beta + \frac{1}{2}ns^2 + \frac{n_0n(\mu_0 - \bar{x})^2}{2(n_0+n)} \quad (18)$$

Nas expressões acima,  $\bar{x}$  e  $s^2$  são as estatísticas suficientes extraídas da amostra  $\varepsilon$ , definidas como:

$$\bar{x} = (1/n) \sum_1^n x_i \quad \text{e} \quad s^2 = (1/n) \sum_1^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (19)$$

**Preditiva de referência:** A distribuição não informativa mais usual para o vector  $(\mu, \lambda)$  é conhecida como distribuição de Jeffreys e é dada por  $f(\mu, \lambda) = c/\lambda$ , com  $c$  a constante de normalização. A preditiva à posteriori de referência é uma t-Student com os seguintes parâmetros [2]:

$$f(x|\varepsilon) = \text{t-Student}\left(\bar{x}, \frac{n-1}{(n+1)s^2}, n-1\right) \quad (20)$$

## 4. EXEMPLO

### 4.1 Descrição do problema

Considere-se a secção representada na Figura 1 que se supõe relativa a um viaduto existente.

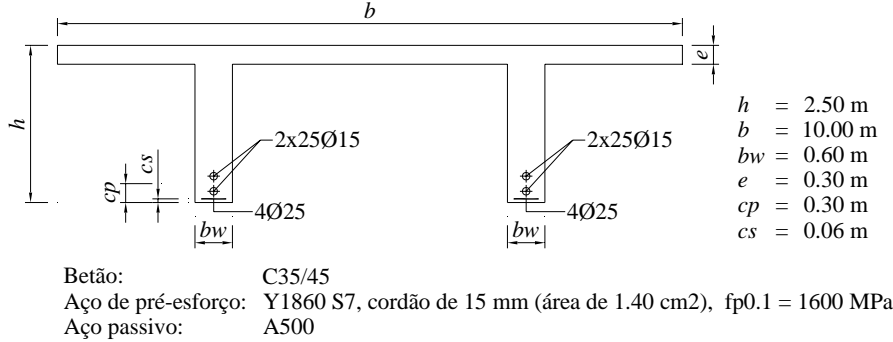


Figura 1. Geometria da secção do viaduto a analisar

Deseja-se efectuar uma avaliação estrutural do viaduto e em particular pretende-se avaliar o momento resistente positivo usando metodologias probabilísticas. Considera-se que a fonte de informação *à priori* é a que consta no projecto do viaduto, nomeadamente as peças desenhadas. A figura 1 resume a informação considerada pertinente. Considera-se também como informação *à priori* as recomendações do PMC (*Probabilistic Model Code*, [5]), em particular as recomendações referentes aos modelos probabilísticos.

A informação que se obtém dos registos de obra, e que permitirá actualizar os modelos probabilísticos, será recolhida dos registos de obra aquando da construção do viaduto.

### 4.2 Formulação para o cálculo do momento resistente

O momento resistente será avaliado pelo método do diagrama rectangular. Adoptam-se para os aços diagramas com patamar de cedência horizontal. Assim, se os aços estiverem em cedência no momento da rotura, as forças que neles actuam são iguais a  $F_p = f_{p0.1} \times A_p$  e  $F_s = f_{sy} \times A_s$ , aço de pré-esforço e aço passivo, respectivamente. Recorde-se que  $f_{p0.1}$  denota a chamada tensão limite convencional de proporcionalidade a 0.1%. Poderão surgir duas situações (figura 2):

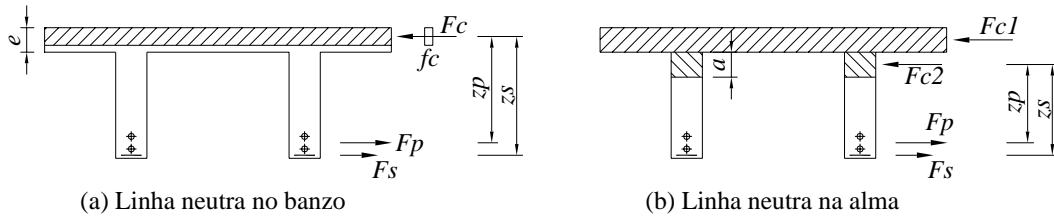


Figura 2. Forças actuantes na secção na rotura

(a) A linha neutra está no banzo, isto é,  $F_{c1} = f_c b e \geq F_p + F_s$ . Nesta situação tem-se:

$$F_c = F_p + F_s \Leftrightarrow f_c b y = F_p + F_s \Leftrightarrow y = (F_p + F_s) / (f_c b)$$

$$z_p = h - c_p - y/2; \quad z_s = h - c_s - y/2; \quad M_{Rd} = F_p \times z_p + F_s \times z_s$$

(b) A linha neutra está na alma, isto é,  $F_{c1} = f_c b e < F_p + F_s$ . Nesta situação tem-se:

$$F_{c1} + F_{c2} = F_s + F_p \Leftrightarrow F_{c1} + f_c \times 2 \times b_w a = F_s + F_p \Leftrightarrow a = (F_s + F_p - F_{c1}) / (f_c \times 2 \times b_w)$$

$$z_p = h - c_p - e - a/2; \quad z_s = h - c_s - e - a/2; \quad M_{Rd} = F_p \times z_p + F_s \times z_s + F_{c1} \times 1/2 \times (e + a)$$

### 4.3 Análise determinística

Começa-se por efectuar uma análise determinística a fim de comparar os resultados com os resultados a obter da análise probabilística. Para tal, o momento resistente será calculado usando os valores característicos das resistências dos materiais, isto é, usando  $f_{p0.1k} = 1600$  MPa;  $f_{sy} = 500$  MPa e  $f_c = 35$  MPa. Obtém-se  $M_{Rk} = 53\,220$  KNm. Usando agora, não os valores característicos, mas os valores de cálculo, isto é, usando:  $f_{p0.1d} = 1600/1.15 = 1391$  MPa;  $f_{syd} = 500/1.15 = 435$  MPa;  $f_c = 35/1.50 = 23.3$  MPa. Obtém-se  $M_{Rd} = 46\,060$  KNm. É interessante notar que o factor de segurança global  $\gamma = M_{Rk} / M_{Rd} = 1.155$  é praticamente igual ao factor de segurança do aço o que permite concluir que, para o caso em análise, a variável com maior peso é a resistência dos aços e não a resistência do betão. Um cálculo simples permite também concluir que a contribuição do aço de pré-esforço para o momento resistente é, no caso presente, cerca de 10 vezes a contribuição do aço passivo. Em resumo, a análise determinística que se acabou de fazer permite concluir que é sobretudo em relação ao aço de pré-esforço que interessa buscar informação actualizada, visto ser a variável com maior peso no momento resistente.

### 4.4 Modelos probabilísticos das variáveis aleatórias

Das diferentes variáveis do problema assumiremos como determinísticas apenas as relativas à geometria da secção ( $h$ ,  $b$ ,  $e$ ,  $b_w$ ). Todas as outras ( $f_{p0.1}$ ,  $f_{sy}$ ,  $f_c$ ,  $A_s$ ,  $c_p$ ,  $c_s$ ) serão consideradas variáveis aleatórias. A distribuição de probabilidade do momento resistente, e em particular o valor característico (quantilho de 0.05), será avaliada através de um programa de cálculo automático que implementa o Método de Monte Carlo, desenvolvido no âmbito do presente trabalho.

**Resistência do aço de pré-esforço,  $f_{p0.1}$ :** O *Probabilistic Model Code* [5] recomenda usar a seguinte relação:  $f_{p0.1} = 0.85 \times f_{pu}$ , em que  $f_{pu}$  designa a tensão de rotura, para a qual recomenda atribuir um desvio padrão  $\sigma = 40$  MPa. Mais refere o PMC [5] que  $\mu_{f_{pu}} = f_{pk} + 1.65\sigma$ , em que  $f_{pk}$  designa a resistência nominal do aço, identificada em geral com o valor característico. No presente exemplo o aço de pré-esforço é da classe Y1860, ou seja  $f_{pk} = 1860$  MPa. Assim, tem-se:

$$\mu_{f_{p0.1}} = 0.85 \mu_{f_{pu}} = 0.85 \times (f_{pk} + 1.65 \times 40) = 0.85 \times (1860 + 66) = 1637 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{f_{p0.1}}^2 = 0.85^2 \times 40^2 \Leftrightarrow \sigma_{f_{p0.1}} = 0.85 \times 40 = 34 \text{ MPa}.$$

Finalmente, segundo o PMC [5], a família normal é adequada para descrever a incerteza na resistência do aço. Portanto, o modelo a adoptar para a resistência do pré-esforço (que para todos os efeitos constituirá o modelo preditivo *à priori*) será:

$$f_{p0.1} \sim \text{Normal}(\mu = 1637 \text{ MPa}, \sigma = 34 \text{ MPa})$$

**Resistência do aço passivo,  $f_{sy}$ :** Relativamente ao aço passivo o PMC [5] recomenda  $\mu = S_{nom} + 2\sigma$ , em que  $\mu$  representa o valor médio da resistência e  $\sigma$  o desvio padrão, para o qual se pode atribuir 30 MPa (aços produção de boa qualidade). No presente exemplo  $S_{nom} = 500$  MPa, pelo que  $\mu = 500 + 2 \times 30 = 560$  MPa. O modelo normal também é adequado para a resistência do aço passivo:

$$f_y \sim \text{Normal}(\mu = 560 \text{ MPa}, \sigma = 30 \text{ MPa})$$

**Resistência do betão,  $f_c$ :** Conforme vimos a resistência do betão não é o factor determinante para o momento resistente positivo da secção em estudo, pelo que se adopta um modelo relativamente simples. Adpta-se o modelo proposto por Wisniewski [6] e que consiste em atribuir à resistência do betão um modelo normal com média exactamente igual ao valor nominal da resistência e um coeficiente de variação de 12%. Assim, tem-se:

$$f_c \sim \text{Normal}(\mu = 35 \text{ MPa}, \sigma = 0.12 \times 35 = 4.2 \text{ MPa})$$

**Áreas do aço,  $A_p$ ,  $A_s$ :** Para as áreas dos aços assumiremos modelos normais com médias iguais às áreas que constam na figura 1 e coeficiente de variação igual a 2%. Tem-se:

$$A_p \sim \text{Normal}(\mu = 140 \text{ cm}^2, \sigma = 2.8 \text{ cm}^2); \quad A_s \sim \text{Normal}(\mu = 39.3 \text{ cm}^2, \sigma = 0.786 \text{ cm}^2)$$

**Cotas do cabo de pré-esforço e armadura passiva,  $c_p$ ,  $c_s$ :** Para descrever a incerteza na cota do cabo de pré-esforço adopta-se uma distribuição uniforme com um mínimo de  $0.30 - 0.02 = 0.28$  e um máximo de  $0.30 + 0.02 = 0.32$ m. Para descrever a incerteza na cota da armadura passiva adopta-se também um modelo uniforme com um mín. de  $0.06 - 0.01 = 0.05$  e um max. de  $0.06 + 0.01 = 0.07$ . Tem-se, pois:

$$c_p \sim \text{Unif}(0.28, 0.32); \quad c_s \sim \text{Unif}(0.05, 0.07)$$

#### 4.5 Análise probabilística com precisão conhecida

**Análise *à priori*:** Por comodidade, denotaremos a tensão limite convencional de proporcionalidade do aço de pré-esforço  $f_{p0.1}$  por  $X$ . Conforme vimos, o modelo  $X \sim \text{Normal}(\mu = 1637 \text{ MPa}, \sigma = 34 \text{ MPa})$  constitui o modelo preditivo *à priori* para  $X$ . Isto significa que  $\lambda_X = 1/34^2 = 0.000865$ . Usando este modelo e os outros descritos anteriormente o programa utilizado forneceu  $M_{Rk} = 52\,480 \text{ KNm}$ , que é muito próximo do obtido pela análise determinística ( $53\,220 \text{ KNm}$ ).

**Análise *à posteriori*:** Admita-se que segundo os registos de obra foram usadas  $n = 9$  bobinas de aço de pré-esforço com as seguintes tensões limite convencional de proporcionalidade em MPa:  $\varepsilon = \{1807, 1818, 1818, 1784, 1860, 1846, 1807, 1829, 1778\}$ . Desta amostra obtém-se facilmente a média amostral  $\bar{x} = 1816 \text{ MPa}$ . Para definir o modelo *à posteriori* é necessário introduzir uma hipótese. Que valor atribuir ao parâmetro  $n_0$ , dimensão da amostra equivalente *à priori*?. Admita-se que não há motivos para dar mais importância aos valores constantes nos registos de obra do que aos valores de que se dispõe *à priori*. Isto equivale a afirmar que  $n_0 = 9$ . Fixado o valor de  $n_0$  é fácil atribuir um valor à precisão  $\lambda$  do modelo. Com efeito, basta atender a que, pela Eq. (10):

$$\frac{n_0}{n_0 + 1} \lambda = \lambda_X \Leftrightarrow \frac{n_0}{n_0 + 1} \lambda = 0.000865 \Leftrightarrow \lambda = \frac{9+1}{9} \times 0.000865 = 0.000961$$

Assim, o modelo *a posteriori* para o aço de pré-esforço é:

$$X | \varepsilon \sim \text{Normal}\left(\mu_n = \frac{n_0 \mu_0 + n \bar{x}}{n_0 + n}, \lambda_{X|\varepsilon} = \frac{n_0 + n}{n_0 + n + 1} \lambda\right) = \text{Normal}(1726.5, 0.000911).$$

Usando este modelo obteve-se  $M_{Rk} = 55\,110 \text{ KNm}$ , que corresponde a um aumento de 5% relativamente ao obtido na análise só com informação *à priori*.

**Análise de referência:** Recorde-se que esta análise só utiliza informação amostral. Assumiremos que  $\lambda_{X|\varepsilon} = \lambda_X = 0.000865$ . Assim, observando a Eq. (13) tem-se:

$$X | \varepsilon \sim \text{Normal}\left(\bar{x}, \lambda_{X|\varepsilon} = \frac{n}{n+1} \lambda\right) = \text{Normal}(1816, 0.000865)$$

Usando este modelo obteve-se  $M_{Rk} = 57\,670 \text{ KNm}$ , a que corresponde um aumento de 10% relativamente ao obtido na análise *à priori*.

Conforme se acaba de constatar, quando se admite conhecida a precisão de  $X$  é necessário assumir um valor para  $n_0$ . Um valor pequeno para  $n_0$  significa dar mais peso à informação amostral. Um valor grande de  $n_0$  significar dar menos peso à informação amostral. Uma análise com interesse óbvio, mas que não será aqui feita limitação de espaço, é a análise de sensibilidade de  $M_{Rk}$  ao parâmetro  $n_0/n$ .



#### 4.6 Análise probabilística com média e precisão aleatórias

**Análise à priori:** A análise à priori é idêntica à feita no §4.4, isto é, assumiremos que  $X \sim \text{Normal}(\mu = 1637 \text{ MPa}, \sigma = 34 \text{ MPa})$ . Recordar-se que se obteve  $M_{Rk} = 53\,220 \text{ KNm}$ .

**Análise à posteriori:** Conforme vimos, é necessário definir 4 parâmetros ( $\mu_0$ ,  $n_0$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ). Quanto ao primeiro, obviamente  $\mu_0 = 1637 \text{ MPa}$ . Quando ao segundo assumiremos  $n_0 = 9$ , o que equivale a dar igual importância à informação existente e à informação adicional. O parâmetro  $\alpha$  é o parâmetro de forma da distribuição gama. Assumiremos para  $\alpha = 3$ . Relativamente ao parâmetro  $\beta$ , obtém-se facilmente da Eq. (16). Considerando que  $V[X] = 34^2$  obém-se  $\beta = 2080.3$ . Quanto a  $u_n$  e  $\beta_n$  aplicando a Eq. (18), obtém-se  $u_n = 1726.5$  e  $\beta_n = 76994$ . Introduzindo estes valores no modelo obtém-se  $M_{Rk} = 51\,840 \text{ KNm}$ , valor este que é bastante inferior ao valor correspondente obtido considerando a precisão fixa, e até é inferior ao valor obtido na análise à priori. Este resultado pode parecer estranho à primeira vista. Na verdade, visto que as características dos aços que constam nos registos são mais favoráveis do que as correspondentes valores à priori, esperaríamos que o valor do momento resistente aumentasse. Uma análise cuidadosa mostra que o que está a acontecer é que as médias à priori e à posteriori são bastantes diferentes e a única maneira de conciliar as duas amostras é através de uma grande variância. É justamente esta grande variância que é responsável pela diminuição do momento resistente. O gráfico seguinte pretende ilustrar estas considerações:

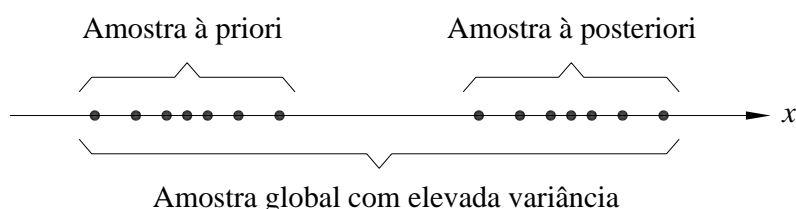


Figura 3. Conciliação das amostras à priori e à posteriori

Este exemplo permite concluir que quando as amostras à priori e à posteriori têm médias bastante diferentes, e isto acontece com frequência quando se parte de valores recomendados por regulamentos que tendem a ser conservadores, deve-se ter cuidado. Nestes casos, é aconselhável fixar a precisão do modelo.

Conforme se viu acima, houve a necessidade de arbitrar valores para  $n_0$  e  $\alpha$ . Tem interesse analisar a sensibilidade de  $M_{Rk}$  a estes parâmetros. Por falta de espaço, esta análise não será aqui feita, referindo-se apenas que neste exemplo  $M_{Rk}$  não é muito sensível aos valores plausíveis que o parâmetro  $\alpha$  pode assumir.

**Análise de referência:** Na análise de referência aplica-se a Eq. (20) que, como se observa só utiliza informação amostral. Não é necessário arbitrar qualquer valor ou efectuar qualquer hipótese. Toda a informação necessária para definir o modelo é extraída da amostra. O modelo para a resistência do aço é então dada por

$$X | \varepsilon \sim t\text{-Student}\left(1816, \frac{9-1}{9+1} \frac{1}{626.9}, 9-1\right) = t\text{-Student}(1816, 0.00128, 8)$$

Obteve-se  $M_{Rk} = 57\,900 \text{ KNm}$  que é muito parecido com o valor obtido em §4.4. No entanto não foi preciso arbitrar qualquer valor, tornando a análise mais simples do que a efectuada em §4.4.

## 5. CONCLUSÕES

Na presente comunicação abordou-se a actualização Bayesiana de modelos normais. Os procedimentos de actualização foram ilustrados através dum exemplo — avaliação do momento resistente dum viaduto. Observou-se que, entre as diferentes variáveis de que depende o momento resistente, a resistência do aço de pré-esforço tem, nesse exemplo, um peso significativo. Dos registos de obra obteve-se uma amostra da resistência do aço de pré-esforço, a qual, por aplicação de metodologias Bayesianas, permitiu actualizar a respectiva distribuição de probabilidade, e consequentemente a distribuição de probabilidade do momento resistente. Os resultados apresentados mostram as potencialidades das metodologias Bayesianas quando se considera novas fontes de informação.

A actualização de uma distribuição de probabilidade requer assumir que os parâmetros da distribuição são, eles próprios, variáveis aleatórias. Como referido no princípio, estabeleceu-se como objectivo analisar as implicações de se admitir que apenas a média é aleatória e de se admitir que tanto a média como a precisão são ambos aleatórias. Da análise efectuada ressaltam as seguintes conclusões principais:

- 1) Face a um problema de actualização dum modelo normal, a opção natural é admitir aleatoriedade para ambos os parâmetros do modelo. Aliás, como se viu, esta é a única maneira de extrair toda a informação contida na nova amostra.
- 2) Se a informação *à priori* for escassa e a única informação relevante for a obtida da amostra, a actualização torna-se mais simples se se admitir aleatoriedade para ambos os parâmetros. A análise Bayesiana extrai da amostra toda a informação necessária para construir o modelo preditivo, não havendo necessidade de assumir qualquer hipótese.
- 3) Se a informação *à priori* for relevante a consideração da aleatoriedade para ambos os parâmetros pode conduzir, porém, a resultados não esperados. Com efeito, se a diferença entre a média *à priori*  $\mu_0$  e a média amostral  $\bar{x}$  for significativa, a variância do modelo preditivo resultante pode ser de tal maneira grande que as inferências realizadas a partir dele não sejam realistas. Se assim for, é aconselhável fixar a variância do modelo. Naturalmente surge a pergunta: que critério utilizar para decidir se se deve fixar a variância? Sugere-se o seguinte critério: Se a variância amostral,  $s^2$ , for da ordem de grandeza de  $(\mu_0 - \bar{x})^2$ , então é de considerar ambos os parâmetros aleatórios. Caso contrário é aconselhável fixar a variância.

## REFERÊNCIAS

- [1] Paulino, C.D; Turkman, M.A.; Murteira, B. (2003) – *Estatística Bayesiana*. Fundação Calouste Gulbenkian. ISBN: 972-31-1043-1.
- [2] Bernardo, J.M.; Smith, A.F.M (2000) – *Bayesian Theory*. John Wiley & Sons Ltd. ISBN: 0 471 49464 X.
- [3] Raiffa, H.; Schlaifer, R. (2000) – *Applied Statistical Decision Theory*. John Wiley & Sons Ltd . ISBN: 0-471-38349-X (Classics Edition).
- [4] Ang, Afredo H.S.; Tang, Wilson H. (1975) – *Probability Concepts in Engineering Planning and Design*. Volume 1. John Wiley & Sons, Ltd.
- [5] Joint Committee on Structural Safety JCSS (2001) – *Probabilistic Model Code*. Publicação disponível na Internet em [www.jcss.ethz.ch](http://www.jcss.ethz.ch).
- [6] Wisniewski, Dawid (2007). *Safety Formats for the Assessment of Concrete Bridges*. Ph.D. Thesis. Universidade do Minho, Departamento de Engenharia Civil, Azurém, Guimarães.