

## **Métodos simplificados para o cálculo dos momentos de segunda ordem em pilares de betão armado de acordo com o Eurocódigo 2**



**Helena Barros<sup>1</sup>**



**Vitor D. Silva<sup>2</sup>**



**Carla Ferreira<sup>3</sup>**

### **RESUMO**

Neste trabalho descrevem-se os modelos para análise dos efeitos de segunda ordem indicados no Eurocódigo 2 [1]. Um dos modelos, designado por método geral, baseia-se em análises não lineares que incluem a não linearidade geométrica e a não linearidade material. Para a descrição do comportamento do betão deve ser usada uma lei constitutiva não linear apropriada. Um dos métodos simplificados é designado por método da curvatura nominal, com formulação idêntica ao descrito no REBAP[5]. O terceiro método é designado por método da rigidez nominal e baseia-se numa estimativa da rigidez de flexão do pilar com a participação do aço e tendo em conta a parcela respeitante ao betão comprimido. Apresentam-se resultados de aplicação dos métodos ao cálculo de colunas encastradas com diferentes esbeltezas e diferentes excentricidades da carga axial. O método da curvatura nominal mostra em alguns casos conduzir a resultados em que o coeficiente de segurança é ligeiramente inferior ao valor esperado. Com o método da rigidez nominal quando se encontram soluções estas correspondem sempre a áreas de armadura superiores às encontradas pelo método da curvatura nominal. No entanto na maioria das situações não é possível obter solução.

### **PALAVRAS-CHAVE**

Betão armado. Pilares. Momentos de segunda ordem. Curvatura nominal. Rigidez nominal.

<sup>1</sup> LABEST - Universidade de Coimbra, Departamento de Eng. Civil, Coimbra, Portugal. hbarros@dec.uc.pt

<sup>2</sup> Universidade de Coimbra, Departamento de Eng. Civil, Coimbra, Portugal. . vdsilva@dec.uc.pt

<sup>3</sup> Universidade de Coimbra, Departamento de Eng. Civil, Coimbra, Portugal. . carla@dec.uc.pt

## 1. INTRODUÇÃO

Este trabalho incide sobre o dimensionamento de estruturas de betão armado nas quais os esforços devidos a efeitos de segunda ordem não devem ser desprezados. Estão nesta situação, por exemplo, os pilares que, submetidos a esforço axial de compressão, têm um agravamento do momento flector resultante da sua deformação. Seguindo o procedimento dos códigos de dimensionamento, nomeadamente o REBAP[5] e mais recentemente o Eurocódigo 2 [1], podem efectuar-se estes dimensionamentos de forma em geral expedita. Nos casos em que isso é possível, os códigos definem modelos simplificados que permitem dimensionar de forma conservativa, ou seja garantindo sempre com uma certa margem a verificação da segurança. Neste trabalho mostra-se como os métodos simplificados aplicados à coluna modelo nem sempre são satisfatórios observando-se em alguns casos que a carga máxima que este suporta é inferior ao valor estabelecido pelos criterios de verificação da segurança.

## 2. EFEITOS DE SEGUNDA ORDEM EM PILARES

Os efeitos de segunda ordem têm de ser considerados nos elementos estruturais em que a deformação aumente de forma significativa os esforços obtidos com base na estrutura indeformada. No caso do betão armado a deformação estrutural é sensível ao facto do betão não ter grande resistência à tracção e suportar tensões muito baixas. Estas tensões de tracção são até desprezadas quando se efectua o cálculo à rotura e se considera que a secção se encontra fendilhada. Numa secção fendilhada a parte activa é apenas o aço e as fibras comprimidas do betão, o que pode reduzir significativamente a rigidez de flexão. Como a secção fendilhada tem menor rigidez, onde houver fendas a peça tem maior deformação. O comportamento não linear do betão em compressão e as deformações de fluência também devem ser considerados nestes modelos, porque também afectam a deformação final da peça. O Eurocódigo 2 [1] indica três possíveis métodos para o cálculo dos efeitos de segunda ordem em estruturas de betão armado. Um deles é designado por método geral (MG) e baseia-se na análise geométrica e materialmente não linear com leis constitutivas adequadas ao comportamento do aço e do betão à compressão. Os outros dois são métodos simplificados designados por método da curvatura nominal e método da rigidez nominal, mais adequados aos cálculos expeditos. Estes métodos foram desenvolvidos num trabalho de apoio às regras do Eurocódigo 2 de Westerberg [2]. O método da curvatura nominal tem a mesma designação e é semelhante ao indicado no REBAP[5] para o cálculo dos efeitos de segunda ordem, apenas variando a definição de alguns parâmetros.

### 2.1 Método Geral

O método geral (MG), embora seja o mais correcto, é o menos utilizado por obrigar ao uso de modelos computacionais mais complexos. Neste método é necessário desenvolver um modelo que considere a não linearidade geométrica pois tem de ser considerado o efeito da deformação da estrutura no cálculo dos esforços. Este pode ser efectuado pelo método dos elementos finitos usando uma formulação que considere deformações infinitesimais ou finitas. No presente caso foi usado um algoritmo que considera rotações finitas [4]. Para além disso, como o betão tem um comportamento não linear que se manifesta em compressão por uma lei constitutiva que se afasta de forma significativa da lei linear traduzida pela Lei de Hooke, para uso deste método a lei constitutiva para o betão comprimido indicada no Eurocódigo 2 [1] é

$$\sigma_c = f_{cd} \left( k \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} + \frac{\varepsilon_c^2}{\varepsilon_{c1}^2} \right) / \left( 1 - (k-2) \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c1}} \right) \quad (1)$$

com o parametro  $k = 1,05 E_{cd} |\varepsilon_{c1}| / f_{cd}$ ,  $E_{cd} = E_{cm} / 1.2$ . As constantes para os betões são o valor médio do módulo de elasticidade  $E_{cm}$ , a extensão para a tensão máxima  $\varepsilon_{c1}$  e o valor médio da tensão de rotura  $f_{cm}$ , que estão definidas no quadro 3.1 do Eurocódigo 2 [1].

A fluência contribui de forma importante para as deformações finais das estruturas de betão e por isso deve ser considerada. Esta pode ser introduzida no modelo dividindo o módulo de elasticidade por um factor  $(1 + \varphi_{ef})$  em que  $\varphi_{ef}$  é o coeficiente de fluência indicado no Eurocódigo 2 [1].

O comportamento do betão em tracção traduz-se por uma resistência à tracção muito baixa e pela formação de fendas em determinadas secções. A retenção de tensões de tracção entre fendas traduz o facto de o betão traccionado, que se encontra entre duas fendas consecutivas, poder suportar algumas tensões de tracção. Nos cálculos é corrente não entrar com este efeito e desprezar esta contribuição para o aumento da rigidez. O cálculo assim efectuado é favorável em termos de segurança uma vez que a deformada final obtida é superior à real dado que nesta simplificação a estrutura considerada é menos rígida do que a estrutura real.

## 2.2 Método baseado numa curvatura nominal

O método baseado na curvatura nominal, descrito no Eurocódigo 2 [1], está particularmente indicado para colunas isoladas submetidas a esforço axial constante. Estas colunas têm comprimento de encurvadura  $l_o$  e uma deformada de segunda ordem  $e_2$  dependente do seu comprimento e da curvatura máxima  $1/r$ , dada pela equação seguinte

$$e_2 = \frac{1}{r} \frac{l_o^2}{c} \quad (2)$$

O parametro  $c = 10 \approx \pi^2$  pode ser usado em colunas de secção constante, é indicado no Eurocódigo 2 [1] no ponto 5.8.8.2(4). Refere-se ainda neste ponto que se pode usar um valor inferior no caso do momento de primeira ordem ser constante, sabendo-se que no limite, para momento total (primeira mais segunda ordem) constante, o valor é  $c = 8$ .

A curvatura nominal  $1/r$  é calculada pela seguinte expressão aproximada

$$\frac{1}{r} = k_r k_\varphi \frac{1}{r} \quad (3)$$

onde os parametros são  $k_r = (v_u - v)/(v_u - v_{bal}) \leq 1$  e  $k_\varphi = 1 + \varphi_{ef} \geq 1$ , de acordo com as indicações do Eurocódigo 2 [1]. O primeiro parâmetro  $k_r$  tem em conta a redução da curvatura para esforço axial crescente e o segundo  $k_\varphi$  tem em conta o efeito das deformações de fluência.

## 2.3 Método baseado numa rigidez nominal

No método baseado numa rigidez nominal o Eurocódigo 2 [1] sugere o uso da rigidez nominal  $EI$  definida por

$$EI = k_c E_{cd} I_c + k_s E_s I_s \quad (4)$$

onde os parâmetros são  $k_c = \frac{k_1 k_2}{1 + \varphi_{ef}}$ , sendo  $k_1 = \sqrt{\frac{f_{ck}}{20}}$  e  $k_2 = \nu \frac{\lambda}{170} \leq 0,2$ . No segundo termo da equação toma-se o parâmetro  $k_s = 1$  desde que  $\rho = A_s / A_c \geq 0,002$ , onde  $\rho$  é a taxa geométrica de armadura.

O método está indicado para o cálculo de efeitos de segunda ordem em estruturas estaticamente indeterminadas, como seja o caso de estrutura porticadas.

### 2.3.1 Coeficiente de majoração do momento flector

Com base numa rigidez previamente calculada determina-se um coeficiente de majoração do momento de primeira ordem. Neste método obtem-se o momento de dimensionamento incluindo efeitos de segunda ordem  $M_{ED}$  a partir do momento de primeira ordem  $M_{oED}$  da seguinte forma

$$M_{ED} = M_{oED} \left[ 1 + \frac{\beta}{\frac{N_B}{N_{ED}} - 1} \right] \quad (5)$$

sendo  $N_{ED}$  o esforço axial de cálculo,  $N_B$  a carga crítica e o factor  $\beta = \pi^2 / 8$ .

Note-se que a carga crítica  $N_B$  é dada por

$$N_{ED} = \frac{\pi^2 EI}{l_o^2} \quad (6)$$

onde  $EI$  é a rigidez nominal definida na 'Eq. (4)'. O método pode desta forma ser aplicado a colunas isoladas, tal como se faz no método da curvatura nominal.

### 3. RESULTADOS NUMÉRICOS

O exemplo numérico estudado consiste num pilar encastrado de altura variável  $L$  e armadura simétrica. A secção do pilar é de  $0.40 \times 0.80\text{m}$  com o eixo de maior inércia posicionado de forma a suportar o maior momento. O recobrimento das armaduras é definido por  $a/h=0.10$ , como se mostra na representação geométrica da secção transversal da 'Fig. 1a'. O betão considerado na análise é da classe C25/30 e o aço S500.

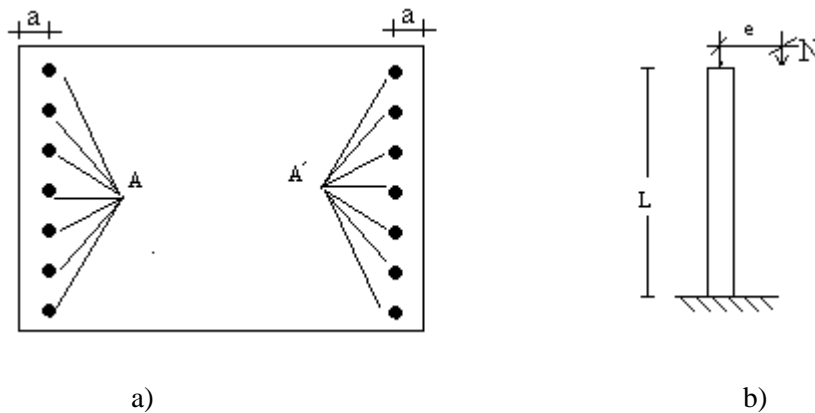


Figura 1. a) Geometria da secção transversal do pilar. b) Alçado do pilar e posicionamento da carga.

Foram analisadas várias colunas com alturas de  $L=3\text{m}$ ;  $6\text{m}$ ;  $9\text{m}$ ;  $12\text{m}$  e  $15\text{m}$ . A coluna considera-se submetida a um esforço axial reduzido calculado por  $\nu = N / b / h / (25000 * 1.5)$ . A carga axial é aplicada com excentricidade  $e$  produzindo um momento flector de primeira ordem dado por  $M_1 = Ne$ .

Os valores usados das excentricidades da carga são  $e = 0.03\text{m}$ ;  $0.09\text{m}$ ;  $0.18\text{m}$ ;  $0.29\text{m}$ ;  $0.54\text{m}$ . Para se poder avaliar o efeito do esforço axial consideram-se três níveis de esforço axial: baixo, médio e alto ( $\nu = N / b / h / (25000 * 1.5) = 0.4$ ;  $0.6$ ;  $0.8$ ) representados na 'Fig. 2', que mostra um ábaco de dimensionamento Barros et al [3].

#### 3.1 Carga axial baixa

Considerando a carga axial igual a  $N=2133.33\text{KN}$ , o esforço axial reduzido é  $\nu = N / b / h / 25000 * 1.5 = 0.4$  a que corresponde uma rotura equilibrada. A área mínima de aço é de

$A_{min}=0.10N/f_{yd}=0.10*2133.33/500000*1.15=4.9\text{cm}^2$ , devendo também  $A>0.002A_c=6.4\text{ cm}^2$ , ou seja  $A=6.4\text{ cm}^2$ . A área máxima é de  $A=A'=0.04A_c/2=128/2\text{ cm}^2=64\text{ cm}^2$ .

Seguindo as indicações do Eurocódigo 2 [1], a excentricidade de 2ª ordem é  $e_2 = \frac{1}{r} l_0^2 \frac{1}{c}$  com

$\frac{1}{r} = k_r k_\varphi \frac{1}{r_0}$ . A curvatura de base é  $\frac{1}{r_0} = \frac{\varepsilon_{yd}}{0.45d} = \frac{2.174 \times 10^{-3}}{0.45 \times 0.72} = 6.71 \times 10^{-3}$  e desprezando a

fluência vem  $k_\varphi = 1$ . Considera-se  $c=10$  e  $k_r = \frac{v_u - v}{v_u - v_{bal}} \leq 1$ , sendo  $v=0.8$ ,  $v_{bal}=0.4$ ,  $v_u = 1 + \varpi$

e  $\varpi = A_s / A_c f_{yd} / f_{cd}$ .

**FLEXÃO COMPOSTA** Secções rectangulares  $A'/A=1$  C12-C50 S500 [3]

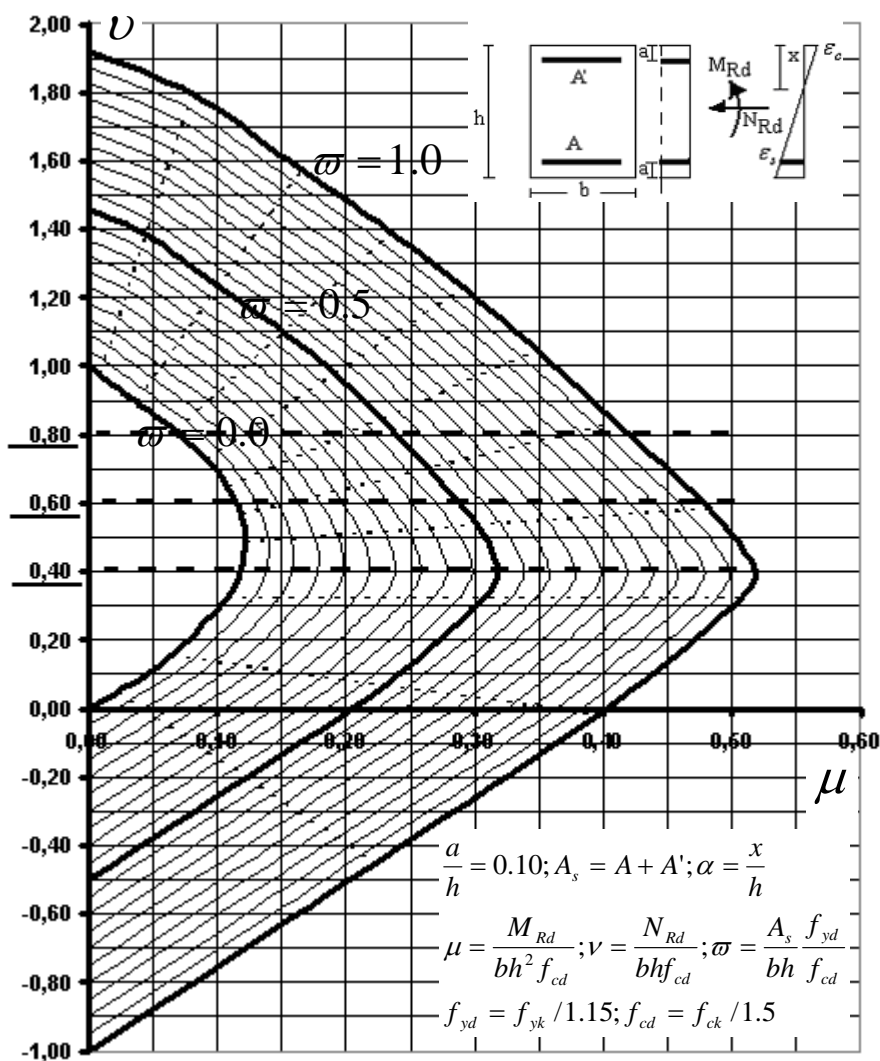


Figura 2. Diagrama de interacção esforço axial reduzido- momento reduzido para o betão da classe C12 a C50 e aço S500, Barros et al [3]

O Quadro 1 mostra as áreas obtidas com o método da curvatura nominal e o Quadro 2 mostra a carga de rotura  $N_{GM}$  (KN) obtida pelo método geral (MG) considerando as áreas indicadas no Quadro 1.

Quadro 1. Áreas de armadura (cm<sup>2</sup>) obtidas no método da curvatura nominal para  $\nu = 0.4$ .

$L$ $MI$	3m	6m	9m	12m	15m	18m
0.03N	<min	<min	<min	13,800	30,544	50,968
0.09N	<min	<min	<min	18,277	35,144	55,568
0.18N	<min	<min	12,512	25,331	42,075	62,499
0.29N	6,011	11,531	20,915	33,733	50,539	>max
0.54N	25,147	30,728	40,112	52,992	>max	>max

Quadro 2. Carga de rotura  $N_{GM}$  (KN) obtida com o método geral para  $\nu = 0.4$ .

$L$ $MI$	3m	6m	9m	12m	15m	18m
0.03N	-	-	-	3357,146	3171,408	2986,364
0.09N	-	-	-	2644,392	2500,467	2386,363
0.18N	-	-	2149,820	2122,250	2119,469	2119,568
0.29N	-	2024,940	2038,742	2044,554	2063,032	-
0.54N	2092,034	2045,244	2016,165	2007,466	-	-

O Quadro 3 mostra o factor de segurança tomado como

$$\gamma = \frac{N}{N_{GM}} \geq 1.0 \quad (7)$$

Sendo  $N = 2133.33KN$  neste caso. Os resultados inferiores à unidade mostram os valores em que a carga de projecto  $N = 2133.33KN$  não é alcançada e portanto o coeficiente de segurança é inferior ao valor esperado. Para as cargas média e alta obtêm-se resultados idênticos.

Quadro 3. Factor de segurança  $\gamma$  para  $\nu = 0.4$ .

$L$ $MI$	3m	6m	9m	12m	15m	18m
0.03N	-	-	-	1,574	1,487	1,400
0.09N	-	-	-	1,240	1,172	1,119
0.18N	-	-	1,008	0,995	0,994	0,994
0.29N	-	0,949	0,956	0,958	0,967	-
0.54N	0,981	0,959	0,945	0,941	-	-

### 3.2 Carga axial média

Considerando a carga axial igual a  $N=3200.0KN$  obtem-se o esforço axial reduzido de  $\nu = N / b / h / 25000 * 1.5 = 0.6$ .

O Quadro 4 mostra as áreas de aço resultantes do dimensionamento pelo método da curvatura nominal. O Quadro 5 contem o esforço axial de rotura  $N_{GM}$  obtido no método geral (MG) considerando as áreas indicadas no Quadro 4.

Quadro 4. Áreas de armadura ( $\text{cm}^2$ ) obtidas no método da curvatura nominal para  $\nu = 0.6$ .

$L$ $MI$	$3m$	$6m$	$9m$	$12m$	$15m$	$18m$
0,03N	<min	<min	<min	25,269	50,907	>max
0,09N	<min	<min	12,229	33,856	58,819	>max
0,18N	6,379	14,045	27,416	46,123	70,533	>max
0,29N	21,344	28,765	41,706	60,291	>max	>max
0,54N	52,317	59,800	72,680	>max	>max	>max

Quadro 5. Carga de rotura  $N_{GM}$  (KN) obtida com o método geral para  $\nu = 0.6$ .

$L$ $MI$	$3m$	$6m$	$9m$	$12m$	$15m$	$18m$
0,03N	-	-	-	3872,348	3860,127	-
0,09N	-	-	3195,590	3309,660	3266,152	-
0,18N	3104,680	3063,720	3066,798	3065,045	3074,098	-
0,29N	3120,982	3048,565	3004,903	3007,136	-	-
0,54N	3156,038	3084,000	3025,468	-	-	-

O Quadro 6 mostra o factor de segurança  $\gamma$  obtido pela 'Eq. (7)' fazendo  $N=3200,0\text{KN}$ .

Quadro 6. Factor de segurança  $\gamma$  para  $\nu = 0,6$ .

$L$ $MI$	$3m$	$6m$	$9m$	$12m$	$15m$	$18m$
0,03N	-	-	-	1,210	1,206	-
0,09N	-	-	0,999	1,034	1,021	-
0,18N	0,970	0,957	0,958	0,958	0,961	-
0,29N	0,975	0,953	0,939	0,940	-	-
0,54N	0,986	0,964	0,945	-	-	-

### 3.3 Carga axial alta

Considerando a carga axial igual a  $N=4266,67\text{KN}$ , obtem-se o esforço axial reduzido de  $\nu = N/b/h/25000 \cdot 1,5 = 0,8$ .

O Quadro 7 mostra as áreas de aço obtidas pelo método da curvatura nominal. O Quadro 8 contém o esforço axial de rotura  $N_{GM}$  obtido no método geral (MG) considerando as áreas indicadas no Quadro 7.

Quadro 7. Áreas de armadura ( $\text{cm}^2$ ) obtidas no método da curvatura nominal para  $\nu = 0,8$ .

$L$ $MI$	$3m$	$6m$	$9m$	$12m$	$15m$	$18m$
0,03N	<min	<min	12,083	42,565	74,275	>max
0,09N	5,091	12,083	27,723	52,747	86,051	>max
0,18N	22,387	30,912	46,613	70,533	>max	>max
0,29N	42,259	51,213	67,099	>max	>max	>max
0,54N	>max	>max	>max	>max	>max	>max

Quadro 8. Carga de rotura  $N_{GM}$  (KN) obtida com o método geral para  $\nu = 0,8$ .

$L$ $MI$	$3m$	$6m$	$9m$	$12m$	$15m$	$18m$
0,03N	-	-	4157,458	4709,358	4693,794	-
0,09N	4130,702	4071,122	4136,556	4198,655	4218,778	-
0,18N	4167,087	4092,840	4057,200	4066,016	-	-
0,29N	4184,545	4100,589	4032,304	-	-	-
0,54N	-	-	-	-	-	-

O Quadro 9 mostra o factor de segurança  $\gamma$  obtido pela 'Eq. (7)' fazendo  $N=3200,0\text{KN}$ .

Quadro 9. Factor de segurança  $\gamma$  para  $\nu = 0,8$ .

$L$ $MI$	$3m$	$6m$	$9m$	$12m$	$15m$	$18m$
0,03N	-	-	0,974	1,104	1,100	-
0,09N	0,968	0,954	0,970	0,984	0,989	-
0,18N	0,977	0,959	0,951	0,953	-	-
0,29N	0,981	0,961	0,945	-	-	-
0,54N	-	-	-	-	-	-

### 3.4 Método da rigidez nominal

Efectuando o dimensionamento pelo método da rigidez nominal obtêm-se os resultados que se resumem nos quadros 10 a 12 nos casos do esforço axial baixo, médio e elevado respectivamente. Conclui-se que este método é mais gravoso obtendo-se sempre valores superiores aos obtidos no método da curvatura nominal. Em grande número dos casos a área de armadura é superior à área de armadura máxima ou então não é possível obter solução, pelo que não é indicada.

Quadro 10. Áreas de armadura ( $\text{cm}^2$ ) obtidas no método da rigidez nominal para  $\nu = 0,4$ .

$L$ $MI$	$3m$	$6m$	$9m$	$12m$	$15m$	$18m$
0,09N	-	-	-	-	-	-
0,18N	0,86	5,77	>max	>max	>max	>max
0,29N	8,03	14,17	>max	>max	>max	>max
0,54N	26,56	39,13	>max	>max	>max	>max

Quadro 11. Áreas de armadura ( $\text{cm}^2$ ) obtidas no método da rigidez nominal para  $\nu = 0,6$ .

$L$ $MI$	$3m$	$6m$	$9m$	$12m$	$15m$	$18m$
0,03N	-	-	-	-	-	-
0,09N	-	-	8,77	>max	>max	>max
0,18N	7,48	12,82	36,37	>max	>max	>max
0,29N	21,65	32,75	67,90	>max	>max	>max
0,54N	54,65	74,15	>max	>max	>max	>max



Quadro 12. Áreas de armadura ( $\text{cm}^2$ ) obtidas no método da rigidez nominal para  $\nu = 0,8$ .

$L$ $MI$	$3m$	$6m$	$9m$	$12m$	$15m$	$18m$
0,03N	-	-	-	-	-	-
0,09N	7,48	21,41	>max	>max	>max	>max
0,18N	25,21	54,11	>max	>max	>max	>max
0,29N	47,47	>max	>max	>max	>max	>max

#### 4. CONCLUSÕES

Neste trabalho descrevem-se os métodos que se utilizam no cálculo dos efeitos de segunda ordem indicados no Eurocódigo 2. Estes são o método geral e os métodos simplificados da curvatura e da rigidez nominal. Os dois métodos simplificados são aplicados ao dimensionamento de uma coluna de betão armado com diferentes esbeltezas e para diferentes excentricidades da carga aplicada. Utilizando o dimensionamento obtido pelo método da curvatura nominal e um algoritmo de análise geométrica e material não lineares determina-se a carga de rotura para cada coluna. Observa-se que a carga de rotura real é inferior ao valor previamente utilizado no seu dimensionamento, sendo por isso nessas situações um dimensionamento insuficiente. O método da rigidez nominal mostra ser bastante conservativo não sendo possível obter solução em alguns casos. Naqueles em que se encontra uma solução esta é sempre superior à obtida pelo método da curvatura nominal.

#### AGRADECIMENTOS

Agradece-se o financiamento concedido pela FCT através do Laboratório da Tecnologia do Betão e do Comportamento Estrutural - LABEST.

#### REFERÊNCIAS

- [1] En 1992-1-1; “Eurocode 2 – Design of concrete structures – Part 1-1: General rules and rules for buildings, December 2003.
- [2] WESTERBERG, Bo. Second order effects in slender concrete structures – Background to the rules in EC2. KTH Civil and Architectural Engineering. Stockholm 2004. Internal report.
- [3] BARROS, H.; FIGUEIRAS, J. -. Estruturas de Betão -Tabelas e Ábacos de Dimensionamento Segundo o Eurocódigo 2 de Secções Solicitadas à Flexão e a Esforços Axiais: Relatório interno LABEST. Setembro 2007.
- [4] SILVA, V. D. ; BARROS, H.; and FERREIRA., C. “ Computation of second order effects in reinforced concrete frame- Comparision with the Eurocode 2 design rules” APCOM’07, EPMESC XI, pp547; (Ed. CD-ROM: 10 pag.); December 3-6, 2007, Kyoto, JAPAN (2007).
- [5] REBAP. Regulamento de Estruturas de Betão Armado e Pré-Esforçado, Imprensa Nacional (1985).
- [6] M.H.F. Melão Barros, C.C. Ferreira and A.F.M. Barros. “Closed Form Interaction Surfaces for Nonlinear Design Codes of Reinforced Concrete Columns with Model Code 90”. *Computers & Concrete* Vol. 2, No. 1, 55-77 (2005).