

Modelação da interacção fluido-estrutura em deslocamentos



Nuno Azevedo¹



Romano Câmara²



José V. Lemos³

RESUMO

A interacção entre um sólido e um fluido existe sempre que na interface ocorra transmissão de forças dado o movimento relativo entre os dois meios. A interacção sob excitações dinâmicas do corpo da barragem com a albufera tem sido realizada recorrendo a uma das seguintes abordagens: i) massas associadas de Westergaard, ii) formulação de Euler e iii) formulação de Lagrange. Em problemas em que o deslocamento do fluido se encontra limitado, ex: reservatório de água numa barragem, é possível utilizar uma formulação de Lagrange, em que as incógnitas do modelo do fluido são os deslocamentos. Dado ambos os domínios serem formulados em deslocamentos, a compatibilidade entre o modelo do sólido e o modelo do fluido encontra-se assim automaticamente satisfeita. O modelo de fluido e de interacção sólido-fluido é aplicado a vários problemas de forma a aferir o seu desempenho, nomeadamente em análises estáticas e análises dinâmicas. Realizou-se um estudo comparativo em termos do parâmetro de penalização, do número de nós adoptado para cada elemento finito tridimensional (9, 20, 27 nós) e do tipo de integração. Nas análises dinâmicas efectuadas, verifica-se o desempenho do modelo na solução de pressões para um paramento com aceleração constante, comparando a solução da pressão hidrodinâmica de Westergaard com a solução de pressões numérica obtida. O estudo realizado permitiu aferir qual o elemento finito que de forma consistente permite obter uma resposta próxima da esperada.

PALAVRAS-CHAVE

Interacção, Dinâmica, Barragem de betão, Fluido

¹ Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Departamento de Barragens de Betão, Av. Do Brasil 101, 1700-066 Lisboa, Portugal. nazevedo@lnec.pt

² Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Departamento de Barragens de Betão, Av. Do Brasil 101, 1700-066 Lisboa, Portugal. rcamara@lnec.pt

³ Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Departamento de Barragens de Betão, Av. Do Brasil 101, 1700-066 Lisboa, Portugal. jlemos@lnec.pt

1. INTRODUÇÃO

A interacção entre um sólido e um fluido existe sempre que na interface ocorra transmissão de forças dado o movimento relativo entre os dois meios. A abordagem aqui descrita pode ser aplicada a problemas em que o deslocamento do fluido se encontra limitado, ex: reservatório de água numa barragem [1]. A interacção sob excitações dinâmicas do corpo da barragem com a albufeira é realizada recorrendo a uma das seguintes abordagens [2]: i) massas associadas de Westergaard, ii) formulação de Euler e iii) formulação de Lagrange. Na abordagem simplificada das massas associadas [3], uma parcela da massa do fluido é adicionada à interface do modelo estrutural da barragem. A parcela das massas associadas é equivalente à pressão hidrodinâmica do fluido sobre a barragem, sendo a solução analítica simplificada baseada numa estrutura rígida e num fluido incompressível. Soluções mais realistas podem ser obtidas com base na modelação do fluido.

Na formulação de Lagrange as incógnitas do modelo do fluido são os deslocamentos, assim, a compatibilidade entre o modelo do sólido e o modelo do fluido encontra-se automaticamente satisfeita. Em relação a uma formulação de Euler, a formulação de Lagrange tem a vantagem de ser mais rapidamente incorporada num programa elementos finitos aplicados a estruturas. Por forma a este tipo de abordagem ter sucesso é necessário que na interface sólido-fluido haja elementos de junta permitindo somente interacção na direcção normal, opção corrente em programa de elementos finitos estruturais, e que seja possível reduzir os modos de deformação de “hour-glass” e de circulação que estão associados ao facto de se estar a modelar um fluido como sendo um sólido com módulo de distorção zero. É necessário, quer em 2D, quer em 3D, adoptar uma penalização ou método equivalente por forma a reduzir a influência destes modos de circulação. Comparativamente a uma formulação de Euler tem ainda vantagem de a matriz de rigidez global ser simétrica.

O modelo de Lagrange referido do fluido tem sido aplicado no estudo do comportamento do fluido e da interacção sólido-fluido através da análise de modos e frequências de vibração apresentando uma boa correlação com os modelos cuja variável de base é a pressão [4]. Mais recentemente foi aplicado na análise sísmica à rotura de barragens de betão de gravidade considerando a interacção sólido-fluido num modelo 2D [5]. Neste artigo, define-se em primeiro lugar as equações de um fluido não viscoso para pequenas amplitudes de movimento, com base nestas definem-se as equações do método dos elementos finitos em deslocamentos para um fluido. Refere-se ainda a penalização adoptada para os modos de circulação baseada no método dos mínimos quadrados.

O modelo de fluido e de interacção sólido-fluido é aplicado a vários problemas de forma a aferir o seu desempenho. Realizou-se um estudo comparativo em termos do parâmetro de penalização, do número de nós adoptado para cada elemento finito tri-dimensional (8, 20 ou 27 nós) e do tipo de integração. O modelo 3D foi testado na análise de uma fatia sujeita num dos paramentos a uma aceleração constante, comparando a solução da pressão hidrodinâmica de Westergaard com a solução de pressões numérica obtida. Realizou-se a análise de frequências de um tanque rígido, e por fim analisou-se as frequências fundamentais de um tanque flexível simulado por uma fatia 3D. Esta análise permitiu aferir qual o elemento finito que de forma consistente obtém uma resposta próxima da esperada, quer em termos analíticos quer em termos experimentais.

2. FORMULAÇÃO DE LAGRANGE DE UM FLUIDO

2.1 Equações fundamentais

As equações que regem o comportamento de um fluido não viscoso para pequenas amplitudes de movimento são dadas por [2]:

$$p_{,i} + \rho \dot{v}_i = 0 \quad (1)$$

$$\dot{p} + \rho c^2 v_{k,k} = 0 \quad (2)$$

em que, v_i são as componentes de velocidade, ρ é a densidade de massa do fluido, p é a pressão do fluido, c é a velocidade acústica no fluido, $v_{k,k}$ é a derivada espacial da velocidade, e \dot{v}_i é a derivada da velocidade em ordem ao tempo. Nesta formulação é necessário definir a velocidade e a pressão do fluido. Dado se admitir que as amplitudes de movimento do fluido são pequenas, as velocidades do fluido podem ser dadas pelas derivadas dos deslocamentos:

$$v_i = \dot{u}_i \quad (3)$$

Derivando a Eq. (2) em ordem ao tempo, e a Eq. (1) em ordem ao espaço e subtraindo as duas equações resultantes, obtém-se a seguinte equação diferencial que rege o comportamento das ondas de pressão:

$$\ddot{p} - c^2 p_{,ii} = 0 \quad (4)$$

Desta forma obtém-se uma equação diferencial em que somente se tem uma única variável, a pressão do fluido. O problema de definir a equação dos elementos de finitos em pressão, tem a ver com facto de ser então necessário utilizar elementos de interface de forma a compatibilizar-se o facto de os elementos sólidos serem definidos em termos de deslocamentos. Substituindo a Eq. (3) na Eq. (2) e depois integrando a equação resultante em ordem ao tempo, fica-se com:

$$p = -\rho c^2 u_{k,k} \quad (5)$$

Diferenciado a Eq. (5) em ordem à variável espacial, e substituindo na Eq. (1), obtém-se a seguinte equação diferencial em que as variáveis são os deslocamentos:

$$p \ddot{u}_i - \rho c^2 u_{k,ki} = 0 \quad (6)$$

2.2 Formulação fraca

A formulação fraca da anterior equação toma então a seguinte forma:

$$\int_{\Omega} w_i (\rho \ddot{u}_i - \rho c^2 u_{k,ki}) d\Omega = 0 \quad (7)$$

Em que w_i são as funções de peso. Realizando uma integração por partes do segundo termo da equação 7, fica-se então com:

$$\int_{\Omega} w_i \rho \ddot{u}_i d\Omega + \int_{\Omega} w_{i,i} \rho c^2 u_{k,k} d\Omega = \int_{\Gamma} w_i \rho c^2 u_{k,k} n_i d\Gamma \quad (8)$$

Dado que a função de ponderação w_i deve satisfazer a condição $w_i n_i = 0$ em Γ_u , fronteira em que se impõe os deslocamentos, a formulação fraca da Eq. (6) fica então:

$$\int_{\Omega} w_i \rho \ddot{u}_i + w_{i,i} \rho c^2 u_{k,k} d\Omega = \int_{\Gamma_p} w_i n_i \bar{p} d\Gamma_p \quad (9)$$

onde \bar{p} é a pressão imposta na fronteira onde as pressões são conhecidas Γ_u .

2.2 Formulação de elementos finitos em deslocamentos

Utilizando uma discretização de elementos finitos em que se expressam as funções de aproximação $u = [u_1 \ u_2 \ u_3]^t$ e as funções de peso $w = [w_1 \ w_2 \ w_3]^t$:

$$\int_{\Omega} w_i \rho \ddot{u}_i + w_{i,j} \rho c^2 u_{k,k} d\Omega = \int_{\Gamma_p} w_i n_i \bar{p} d\Gamma_p \quad (10)$$

Em que \bar{N} é o vector das funções de forma que relaciona o campo de deslocamentos aproximado com os deslocamentos nodais U . Seja então o operador diferencial L dado por:

$$L = \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \quad \frac{\partial}{\partial x_3} \right] \quad (11)$$

A fórmula fraca fica então:

$$W^t \int_{\Omega} [\bar{N}^t \rho \bar{N} \ddot{U} + B^t \rho c^2 B U] d\Omega = -W^t \int_{\Gamma_p} \bar{N}^t n \bar{p} d\Gamma_p \quad (12)$$

Dado se ter que verificar para qualquer aproximação, obtém-se a seguinte relação matricial:

$$M\ddot{U} + KU = F \quad (13)$$

Da análise da Eq. (13), verifica-se que se obteve a mesma equação que aparece na aplicação do método dos elementos finitos a sólidos elásticos lineares, desde que se imponha que o sólido tem um módulo de distorção nulo, sendo então o módulo de compressibilidade volumétrica dado por $K_v = \rho c^2$. Deste modo, num dado programa de elementos finitos a formulação básica de um elemento de fluido para pequenas amplitudes pode ser obtida de forma imediata desde que se imponha que o material tenha um módulo de distorção nulo, e garantindo que só se transmite na fronteira do fluido forças normais à superfície, isto é, é necessário que na interface sólido-fluido existam elementos de junta.

2.3 Minimização dos modos de circulação

A formulação anteriormente apresentada define o comportamento de um fluido em pequenas amplitudes. Dado se estar a analisar um fluido como sendo um meio sólido só com ondas de pressão, existem vários modos de deformação com energia zero. Em alguns casos, estes não causam problemas dado não serem excitados pela solução, mas para excitações dinâmicas existe uma tendência para estes modos aparecerem quer em 2D, quer em 3D. Por estarem associados a energias de deformação nula tendem a amplificar-se e deteriorar numericamente a solução desejada. Uma das soluções encontradas [2] é a de minimizar os modos de circulação associando uma penalização ao rotacional do campo de deslocamentos. Eliminam-se assim os campos de deslocamentos que não são fisicamente possíveis numa formulação em que só existem ondas de pressão dado o módulo de distorção ser zero.

2.3.1 Método dos mínimos quadráticos

O rotacional de um campo de deslocamentos é dado por:

$$rot \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x_1} \\ -\frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Considere-se o campo de deslocamentos aproximado dado por:

$$u_i = u_i^0 + d u_i \quad (15)$$

Utilizando uma abordagem do método dos mínimos quadrados, o que se pretende minimizar é a função $\lambda C' C(u_i)$, em que λ é o chamado coeficiente de penalização. Ao minimizar-se $\lambda C' C(u_i)$, está-se a garantir que o incremento de deslocamento dado pela solução do método dos deslocamentos será tal que minimizará o rotacional dos deslocamentos. De modo a minimizar a função é então necessário garantir que o incremento do campo de deslocamentos é um zero da derivada da função:

$$2 \lambda \frac{\partial C'(d u_i)}{\partial d u} C(u_i) = 0 \Leftrightarrow \bar{\lambda} \frac{\partial C'(d u_i)}{\partial d u} C(u_i) = 0 \quad (16)$$

Da aproximação utilizada na formulação do método dos elementos finitos sabe-se que:

$$d u_i = \bar{N} d U \quad (17)$$

onde, \bar{N} é o vector das funções de forma e $d U$ são os incrementos de deslocamentos no nós da malha. A derivada do rotacional do incremento de deslocamentos em ordem aos deslocamentos é então dada por:

$$\frac{\partial C'(d u_i)}{\partial d u} = \frac{\partial C'(\bar{N} d U_i)}{\partial d U_k} = \begin{cases} C'(\bar{N}), i = k \\ 0, i \neq k \end{cases} \quad (18)$$

A forma fraca da Eq. (16), recordando que $U = U^0 + d U$, fica então:

$$\bar{\lambda} \int_{\Omega} \left(\begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & -\frac{\partial}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & -\frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix} \bar{N} \right)^t \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & -\frac{\partial}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & -\frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix} \bar{N} U d \Omega \quad (19)$$

A Eq. (19) é equivalente a uma matriz de rigidez $K_{\bar{\lambda}}$. Esta matriz deve ser adicionada à matriz de rigidez do elemento, tendo o cuidado de se definir a constante $\bar{\lambda}$ de modo a que esta parte matricial

penalize o valor final do campo de deslocamentos de forma a minimizar o rotacional do campo de deslocamentos. A matriz de rigidez nodal I,J de penalização é dada pelo produto de duas matrizes:

$$\bar{\lambda} \int_{\Omega} \left(\begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & -\frac{\partial}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & -\frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix} \bar{N}_I \right)^t \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & -\frac{\partial}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & -\frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix} \bar{N}_J U d\Omega \quad (20)$$

2.4 Ondas de superfície

Na superfície livre, caso se admita a existência de ondas de superfície, pode-se admitir a seguinte condição fronteira:

$$p = \rho g u_s \quad (21)$$

em que u_s é o deslocamento vertical na superfície livre. A condição anterior é equivalente a admitir-se que a superfície livre se comporta como um apoio elástico de constante elástica igual a ρg .

$$K_s = \rho g \int_{\Omega_s} N_s^t N_s d\Omega_s \quad (22)$$

onde N_s representa as funções de forma utilizadas na interpolação dos deslocamentos da superfície livre e K_s é a matriz de rigidez associadas aos graus de liberdades da fronteira Ω_s (superfície livre) com direcção normal a esta.

3. EXEMPLOS PRÁTICOS – MODELO 3D

3.1 Análise comparativa com a solução de Westergaard

Por forma a avaliar o desempenho do modelo 3D adoptado para o fluido, e aferir qual a melhor solução em termos de número de nós por elemento, número de pontos de Gauss por elemento e valor para o coeficiente de penalização, optou-se por tentar obter numericamente a solução proposta por Westergaard [3] numa fatia 3D de um reservatório, Fig.1a). Adoptou-se para o fluido um coeficiente de compressibilidade $K_v = 2.0 \text{ GPa}$ próximo do da água. Analisou-se uma fatia 3D de uma malha irregular no plano, apresentada na Fig. 1b).

Analisou-se soluções em elementos finitos de 8 nós, 26 nós e de 27 nós para três coeficientes penalização ($\bar{\lambda} = K_v$, $\bar{\lambda} = 10 K_v$ e $\bar{\lambda} = 100 K_v$). De igual modo foram testados soluções sub-integradas, um ponto de Gauss no elemento de 8 nós e oito pontos de Gauss nos elementos de ordem superior, comparando os valores obtidos com as soluções com integração adequada para o grau dos polinómios envolvidos.

Verificou-se que as malhas de elementos finitos de 26 e 27 nós apresentam para os valores de penalização testados, um comportamento diferente do esperado, em especial o valor de pico da pressão máxima é cerca de 60% do valor máximo teórico. Somente com uma solução de 8 nós sub-integrada, um ponto de Gauss, é possível obter um comportamento próximo do expectável numa fatia

3D. Tal como na formulação 2D [6], de forma a obter uma resposta próxima da esperada é necessário adoptar um esquema de sub-integração.

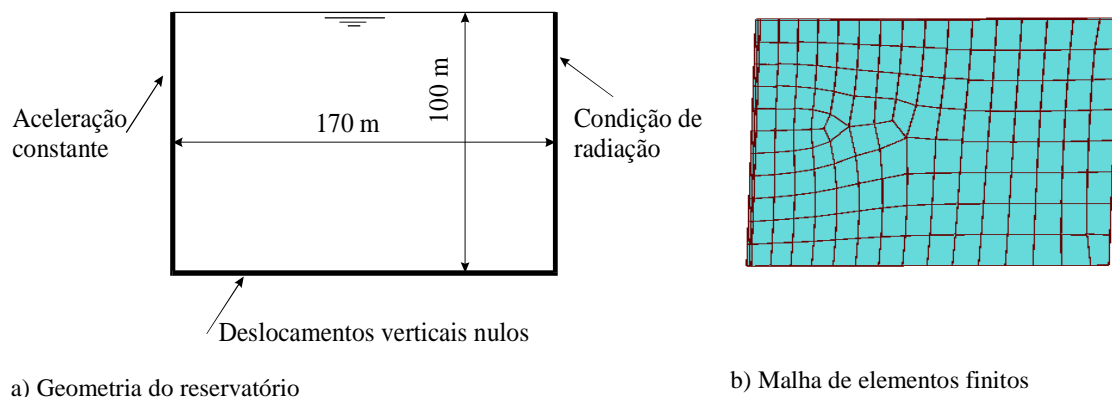


Figura 1. Geometria e malha de elementos finitos

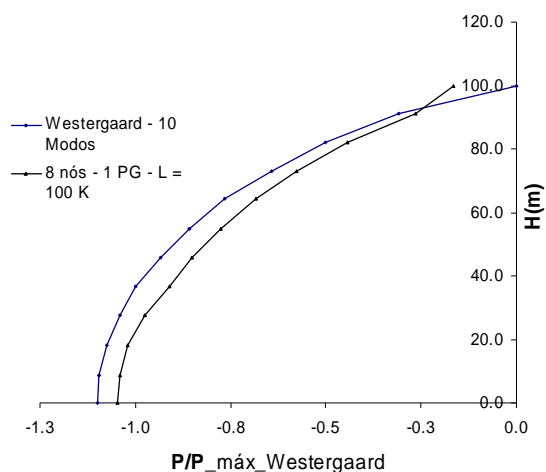


Figura 2. Distribuição de pressões em altura – Solução de Westergaard e numérica

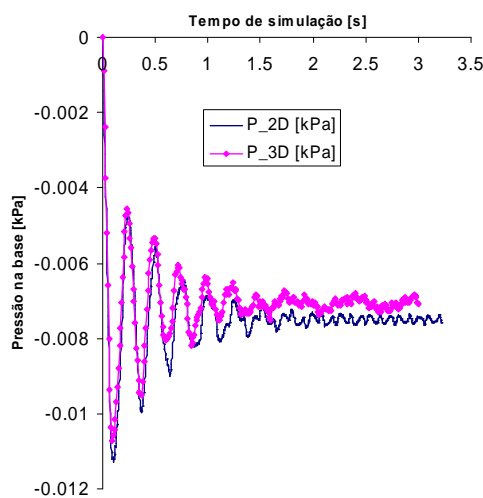


Figura 3. Variação de pressão na base ao longo do tempo

Quadro 1. Valores máximos de Pressão na base

Designação	P_{max} [kPa]	t [s]
Sol. de Westergaard – 10 modos	-0.0108	0.090
Sol. Numérica 2D – 9 nós, 4 PG, $\bar{\lambda} = 100 K_v$	-0.0113	0.101
Sol. Numérica 3D – 8 nós, 1 PG, $\bar{\lambda} = 100 K_v$	-0.0107	0.090

Na Fig. 2 apresenta-se a variação de pressão em altura após a solução convergir para uma solução permanente para o elemento de 8 nós sub-integrado e para um valor do coeficiente de penalização de $\bar{\lambda} = 100 K_v$. Existe uma razoável concordância em altura, apresentando tal como no modelo 2D [6] um ligeiro acréscimo de pressões na vizinhança da superfície livre. Na Fig. 3 apresenta-se a história de pressões do ponto da base ao longo do período de simulação, verificando-se que o modelo numérico estima com grande precisão o valor máximo de pressão e o tempo para o qual o valor

máximo ocorre, Quadro 1. O valor teórico é obtido com base nas expressões definidas em [7]. A Fig. 3 apresenta a variação de pressão na base ao longo do tempo para o elemento de 8 nós e a curva obtida com o elemento 2D de 9 nós sub-integrado [6], observando-se uma razoável concordância entre as duas curvas.

3.2 Frequências próprias de um tanque flexível

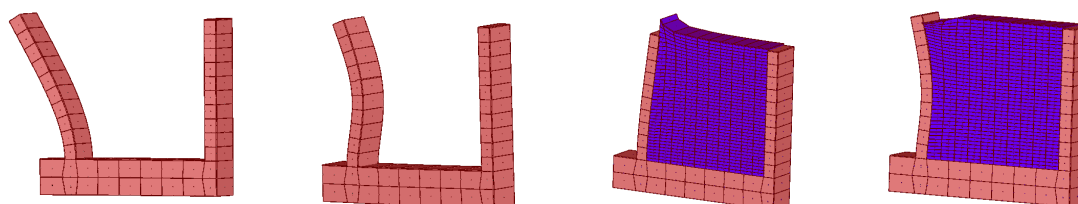
Uma fatia 3D do modelo foi testada na análise da frequência fundamental de um tanque para vários níveis de água, os valores são comparados com os obtidos experimentalmente em [8]. Na Fig. 5 define-se a malha de elementos finitos e as zonas que se encontram apoiadas. A interacção entre os elementos finitos de fluido e sólido é feito através de um elemento de interface, em que somente é permitida a interacção axial. Para o fluido adoptaram-se as propriedades da água, e para o tanque adoptou-se um módulo de elasticidade de 32.5 GPa e um coeficiente de Poisson de 0.2. As propriedades geométricas do tanque e as condições fronteira adoptadas encontra-se definidas com detalhe em [8].



a) Malha de elementos finitos – Vista 1 (Tanque cheio) b) Malha de elementos finitos – Vista 2 (Tanque cheio)

Figura 4. Malha de elementos finitos e condições de apoio – Consola com altura variável de água

Na Fig. 5 apresentam-se os modos de vibração estruturais fundamentais definidos numericamente para o tanque vazio, e os modos correspondentes a estes para o tanque cheio. Nas Figs 6a) e 6b) apresenta-se a evolução da frequência de vibração dos modos 1 e 2 do tanque flexível para várias alturas de água, apresentam-se igualmente os valores experimentais e os valores numéricos obtidos com a hipótese das massas associadas de Westergaard para um modelo 2D [8]. Verifica-se que com o modelo de fluido se obtém, comparativamente ao modelo das massas associadas, uma melhor aproximação para os valores das frequências obtidas experimentalmente, em especial para o modo 1.



a) Modo 1 – Tanque vazio (49.9 Hz)

c) Modo 2 – Tanque vazio (295.0 Hz)

b) Modo 1 – Tanque cheio (32.9 Hz)

d) Modo 2 – Tanque cheio (185.0 Hz)

Figura 4. Modos de vibração – Tanque flexível

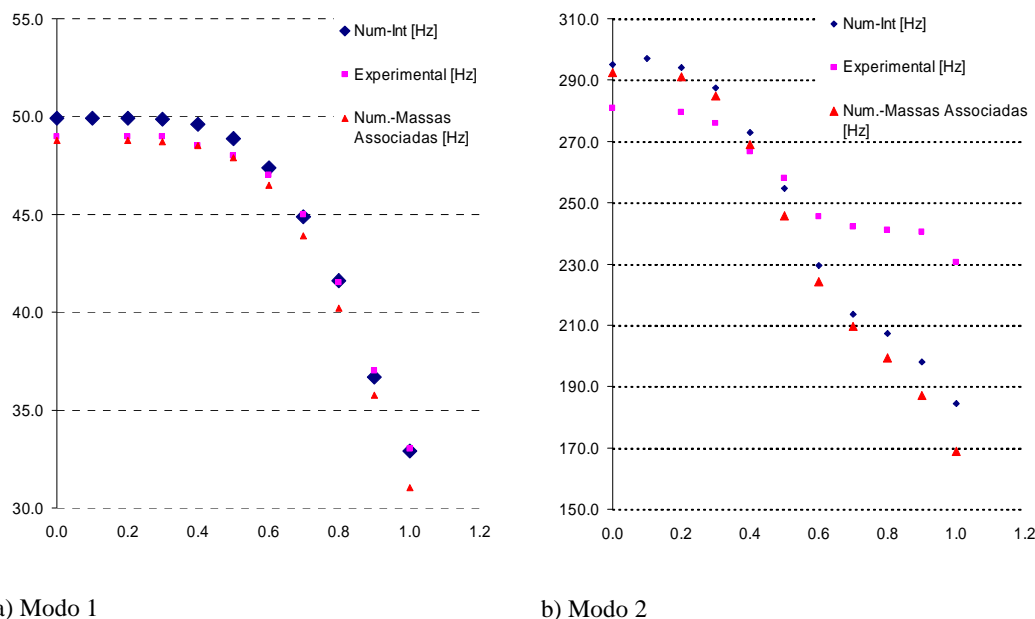


Figura 7. Variação das frequências de vibração com altura de água – Comparação dos resultados numéricos obtidos com interacção fluido-sólido com os os valores numéricos com massas associadas e os experimentais [8]

4. CONCLUSÕES

Apresenta-se uma formulação tridimensional de Lagrange do fluido válida para pequenas amplitudes de movimento, e aplicável a modelos de interacção sólido-fluido correntes em engenharia civil, como por exemplo: tanques e albufeiras. Conforme definido, o modelo de elementos finitos do fluido em termos de deslocamentos necessita de um termo correctivo de modo a minimizar o rotacional do campo de deslocamentos. Ao reduzir a amplitude dos modos de circulação, está-se a limitar as soluções obtidas às soluções fisicamente possíveis.

A grande vantagem de uma formulação do fluido em termos de deslocamentos é a sua fácil incorporação em programas de análise estrutural, somente necessitando de um elemento de interface na zona de ligação de modo a garantir que no fluido só existem condições normais à fronteira. Apresenta ainda a vantagem de conduzir a matrizes simétricas, o que faz com que os esquemas de solução dos sistemas de equações normalmente adoptados continuem a ser aplicáveis. Facilita de igual modo a obtenção dos modos e frequências de vibração do conjunto fluido/sólido que são importantes no comportamento dinâmico.

Realizaram-se várias aplicações práticas de forma a ter uma ideia concreta do desempenho da formulação. Para os vários exemplos testados em 3D, o elemento finito de 8 nós sub-integrados com 1 ponto de Gauss foi o único elemento que de forma consistente possibilitou resultados numéricos próximos dos modelos analíticos. Realçar que com o modelo de fluido descrito é possível obter uma solução próxima da solução de Westergaard com aceleração constante na altura do paramento.

Por fim é de realçar que a escolha do tipo de elemento, do tipo de integração e do valor do parâmetro de penalização dos modos de circulação deverá ser realizada caso a caso. A malha deverá também ser o mais regular possível, de forma a garantir as melhores aproximações. Por exemplo numa análise sísmica deverá em primeiro lugar ser verificado se a malha de elementos finitos do fluido garante uma boa aproximação da solução de Westergaard para acelerações constantes no paramento, e posteriormente é que se deverá realizar uma análise global ao longo do tempo considerando interacção sólido-fluido.

REFERÊNCIAS

- [1] COOK, R. [et al.] - Concepts and applications of finite element analysis..3rd ed. John Wiley & Sons Ltd., 1989.
- [2] WILSON, E; KHALVATI, M., Finite elements for the dynamic analysis of fluid-solid systems, International Journal for Numerical Methods in Engineering, pp. 1657-1668, nº 19, 1983.
- [3] WESTERGAARD, H., Water pressures on dams during earthquakes, Transactions of the American Society of Civil Engineers, pp. 418-433, paper no. 1835, 1931.
- [4] CALAYIR, Y.; DUMANOGLU, A., Static and Dynamic Analysis of Fluid and Fluid-Structure Systems by the Lagrangian method, Computers and Structures, pp. 625-632, nº 49, 1993.
- [5] CALAYIR, Y.; KARATON, M., Seismic fracture analysis of concrete gravity dams including dam-reservoir interaction, Computers and Structures, pp. 1595-1606, nº 83, 2005.
- [6] AZEVEDO, N. [et al], Modelação numérica da interacção fluido-estrutura através de uma formulação de elementos finitos em deslocamentos, ICT Informação técnica, LNEC, pp. 1-40, (para publicação).
- [7] CÂMARA, R., Modelação sísmica de barragens abóbada, ICT, Informação Técnica Barragens, ITB 31, LNEC, pp. 1-63, 2005.
- [8] MENDES, P.; OLIVEIRA, S., Study of dam-reservoir dynamic interaction using vibration tests on a physical model, Proceedings of the IOMAC 2007, Denmark, 2007.