

Aplicação do Método das Forças Fictícias à Modelação 1D da Não Linearidade Material em Estruturas Reticuladas de Betão Armado



P. Gala¹



P. Providência²



V. Dias da Silva³



M. Ferreira⁴

RESUMO

Foi recentemente estabelecida uma formulação unidimensional (1D) para o método das forças fictícias (MFF) nas versões contínua e discreta [1]. Este método iterativo de análise não linear de estruturas reticuladas considera a não linearidade material por meio de um carregamento fictício, sendo a rigidez da estrutura conservada durante o processo iterativo. O MFF permite ainda uma modelação da não linearidade geométrica pela inclusão do carregamento equivalente do Método das Forças Transversais Equivalentes (MFTE).

O carácter 1D desta formulação reflecte-se na consideração da não linearidade material através da relação constitutiva momento-curvatura da secção, em vez da relação tensão-extensão habitualmente usada na modelação 3D de estruturas. Este carácter 1D, mais particularmente na versão discreta do MFF, viabiliza a sua aplicação conjunta com qualquer programa informático corrente de cálculo linear de estruturas.

Nesta comunicação apresenta-se o MFF e ilustra-se a sua aplicação com um exemplo, que pretende demonstrar a simplicidade deste método, a qual ombreia com a exibida pelo MFTE na modelação da não linearidade geométrica.

PALAVRAS-CHAVE

Não Linearidade Material, Forças Fictícias, Método Iterativo, Betão Armado.

¹ Instituto Politécnico de Leiria, Escola Superior de Tecnologia e Gestão - Departamento de Engenharia Civil, 2411-901, Leiria, Portugal. pedro.gala@estg.ipleiria.pt

² CIEC - Departamento de Engenharia Civil, Universidade de Coimbra, Rua Luís Reis Santos 3030-788 Coimbra, Portugal. provid@dec.uc.pt

³ CIEC - Departamento de Engenharia Civil, Universidade de Coimbra, Rua Luís Reis Santos 3030-788 Coimbra, Portugal. vdsilva@dec.uc.pt

⁴ Lena, Engenharia e Construções, S.A. 2495-185 Santa Catarina da Serra. miguelpedrosaferreira@gmail.com

1. INTRODUÇÃO

No seguimento do Model Code do CEB [2], o EC2 [3] enquadra num método geral os procedimentos de cálculo admissíveis para análise e dimensionamento de estruturas reticuladas de betão armado, incluindo as não linearidades geométrica e material, porém, sem propor procedimentos de aplicação simples. Ora já num boletim do CEB [4] eram reunidos métodos que, partindo dos princípios orientadores do método geral e estabelecendo algumas hipóteses simplificativas, possibilitam procedimentos expeditos de análise. Outros métodos expeditos têm sido utilizados com sucesso na análise não linear de estruturas reticuladas de betão armado. Refira-se o método das deformações impostas proposto por Aguado [5] e Mari e Aguado [6] e ainda o método proposto por Morisset [7] para pilares esbeltos de betão armado e utilizado por Cândio Martins [8]. O método clássico das forças transversais equivalentes, MFTE, Adams [9], Lui [10] e Chen [11], é um método iterativo destinado à análise geometricamente não linear de estruturas reticuladas, que (i) opera com a rigidez tangente inicial da estrutura e (ii) inclui a não linearidade geométrica mediante um carregamento transversal equivalente.

Chen [11] apresenta igualmente diversos métodos de análise geométrica e materialmente não linear de estruturas reticuladas, incluindo uma metodologia para considerar a não linearidade material no MFTE. Porém, esta metodologia, para além de ser particularizada para estruturas metálicas e de considerar a não linearidade material por meio da relação tensão-extensão, não opera com a rigidez tangente inicial do sistema, o que reduz muito a sua aplicabilidade como método expedito para um material estrutural arbitrário. Para ultrapassar estas limitações Gala [1] estabeleceu o método das forças fictícias (MFF). O MFF é um método iterativo (i) que considera a não linearidade material, (ii) opera com a rigidez tangente inicial e (iii) inclui o MFTE. No MFF a não linearidade material é modelada (i) por meio da relação constitutiva momento-curvatura da secção, em vez das relações tensão-extensão do material, por exemplo do betão e do aço usadas na modelação 3D de estruturas de betão armado, (ii) através dum campo de forças fictícias estabelecido a partir da relação constitutiva da secção. Lin [12] utilizou um carregamento fictício para modelar a não linearidade material em estruturas reticuladas com um número reduzido de barras num procedimento incremental não iterativo. O carácter 1D do MFF, mais particularmente a sua versão discreta, viabiliza a sua aplicação conjunta com qualquer programa informático corrente de análise linear de estruturas.

Gala [1] estabeleceu duas fórmulas de iteração e respectivas expressões para o carregamento fictício – 1ª Abordagem (1ªab.) do MFF [1] e [13], denominada nesse artigo “versão geral”, e 2ª Abordagem (2ªab.) [1] do MFF. As expressões do carregamento fictício proposto e as fórmulas de iteração do MFF viabilizam a sua utilização conjunta com o MFTE. Aquelas fórmulas de iteração correspondem respectivamente, ao “Initial Stress Method” de Zienkiewicz [14] e ao “Initial Strain Method” de Argyris [15] embora estes não sejam especialmente vocacionados para estruturas reticuladas. Note-se que estes métodos, e portanto o MFF, são efectivamente aplicações do Método de Newton-Raphson Modificado sob condições particulares. A 2ªab. do MFF é também similar à metodologia proposta por Aguado [5] e Mari e Aguado [6]. Estes métodos coincidem ainda na descrição da não linearidade por meio de relações momento-curvatura, para além de outras hipóteses simplificativas.

Nesta comunicação apresenta-se a descrição discreta do MFF. A comunicação focaliza-se numa descrição física do método, com vista à aplicação prática do mesmo.

2. O MÉTODO DAS FORÇAS FICTÍCIAS

2.1 Descrição geral e hipóteses simplificativas

O MFF determina a solução material e geometricamente não linear na análise de estruturas reticuladas de betão armado, num processo iterativo que opera mantendo constante a rigidez da estrutura e em que

a não linearidade material (i) é descrita por meio da relação momento-curvatura das secções e (ii) é considerada por meio de um carregamento fictício que é função desta relação constitutiva.

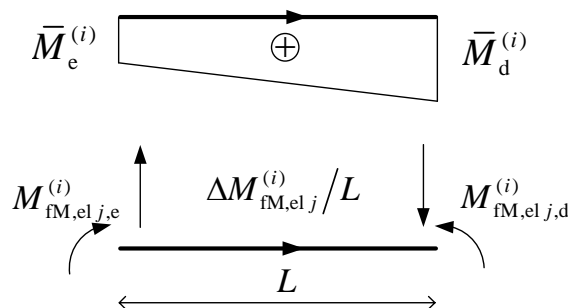


Figura 1. Diagrama de momentos flectores num elemento linear e convenção de sinais positivos para o carregamento fictício.

No elemento j o carregamento nodal fictício na iteração i é constituído pelos momentos $M_{\text{fm,el } j, e}^{(i)}$ e $M_{\text{fm,el } j, d}^{(i)}$ e pelas forças transversais $\Delta M_{\text{fm,el } j}^{(i)}/L$, Fig. 1, com

$$\Delta M_{\text{fm,el } j}^{(i)} = -M_{\text{fm,el } j, e}^{(i)} + M_{\text{fm,el } j, d}^{(i)} \quad (1)$$

Este carregamento é autoequilibrado, sendo o correspondente campo de esforços designado de “campo de esforços fictício”. O carregamento fictício produz (i) uma variação do campo de esforços, que numa estrutura isostática é dada pelo campo de esforços fictício, e (ii) uma variação do campo de curvaturas associada à não linearidade material.

Numa estrutura hiperestática a variação de esforços associada ao carregamento fictício, inclui, para além do campo de esforços fictício, a “variação hiperestática do campo de esforços”. Assim, numa estrutura hiperestática, a variação do campo de esforços produzida pelo carregamento fictício corresponde à soma destas duas parcelas, que aqui serão designadas, respectivamente, “isostática” (associada ao campo de esforços fictício) e “hiperestática”.

O campo de esforços efectivo é obtido após a subtracção do campo de esforços fictício, verificando-se que, no caso das estruturas isostáticas, o campo de esforços efectivo não é influenciado pela não linearidade material.

No MFF, para além das hipóteses simplificativas assumidas pela teoria de Euler-Bernoulli para a flexão de vigas, são admitidas duas hipóteses suplementares, que facilitam sua utilização prática.

Hipótese 1 – relação constitutiva

A relação constitutiva, em particular as suas componentes axial e de flexão, é estabelecida com base numa estimativa da distribuição linear do campo do esforço axial, obtida por exemplo a partir de uma análise elástica linear efectuada de acordo com o EC2 [3]. Esta hipótese reflecte-se nas relações momento-curvatura e esforço-extensão axial, admitindo-se, pois, que não variam no decorrer do processo iterativo. Relativamente à relação esforço-extensão axial considera-se como simplificação adicional que a rigidez axial seccional é constante e, no caso de estruturas de betão armado, dada pela rigidez em fase não fendilhada. De uma forma mais rigorosa, considerar-se-ia a rigidez axial inicial da secção efectiva.

Hipótese 2 - comportamento holonómico

Admite-se que não há dissipação de energia nas zonas plastificadas, considerando-se pois que o problema é efectivamente não linear elástico (holonómico), com propriedades idênticas em carga e descarga. Esta hipótese dispensa a realização de uma análise incremental.

Note-se que qualquer destas hipóteses poderia ser facilmente dispensada. Refira-se ainda que a distribuição de rigidez de flexão, sendo desconhecida à partida, baseia-se no campo de momentos flectores, sendo portanto actualizada em cada iteração, através do carregamento fictício. Também no MFTE a distribuição do esforço axial é suposta fixa em cada iteração. O MFF [1] utiliza relações momento-curvatura seccionalmente rectas com um número arbitrário de troços. Uma lei constitutiva arbitrária pode ser aproximada deste modo e com um rigor crescente com o número de troços considerado. A descrição discreta do MFF considera uma distribuição de rigidez regularizada, substituindo-se a distribuição de rigidez seccionalmente constante (constante por troços) baseada na lei constitutiva seccionalmente recta, por uma distribuição contínua seccionalmente recta (trapezoidal) baseada nas curvaturas nodais elementares, ver Fig. 2. O refinamento progressivo da malha de elementos finitos (malha tipo 2 - fixa) aproxima a distribuição de rigidez regularizada da distribuição de rigidez constante por troços. A Fig. 2 representa ainda uma malha “adaptativa” não uniforme (malha tipo 1), dependente da lei constitutiva e variável com o processo iterativo, portanto sem interesse prático.

Embora o MFF tenha sido estabelecido para relações momento-curvatura com um número arbitrário de troços [1], por simplicidade utilizar-se-á para a sua exposição o caso bilinear (efectivamente tetralinear se se considerarem comportamentos distintos para momentos flectores maiores e menores que zero). As expressões do carregamento fictício para o caso geral n-linear, incluindo pois o caso bilinear e o caso trilinear do exemplo ilustrativo da secção 3, são apresentadas em [1] e [13].

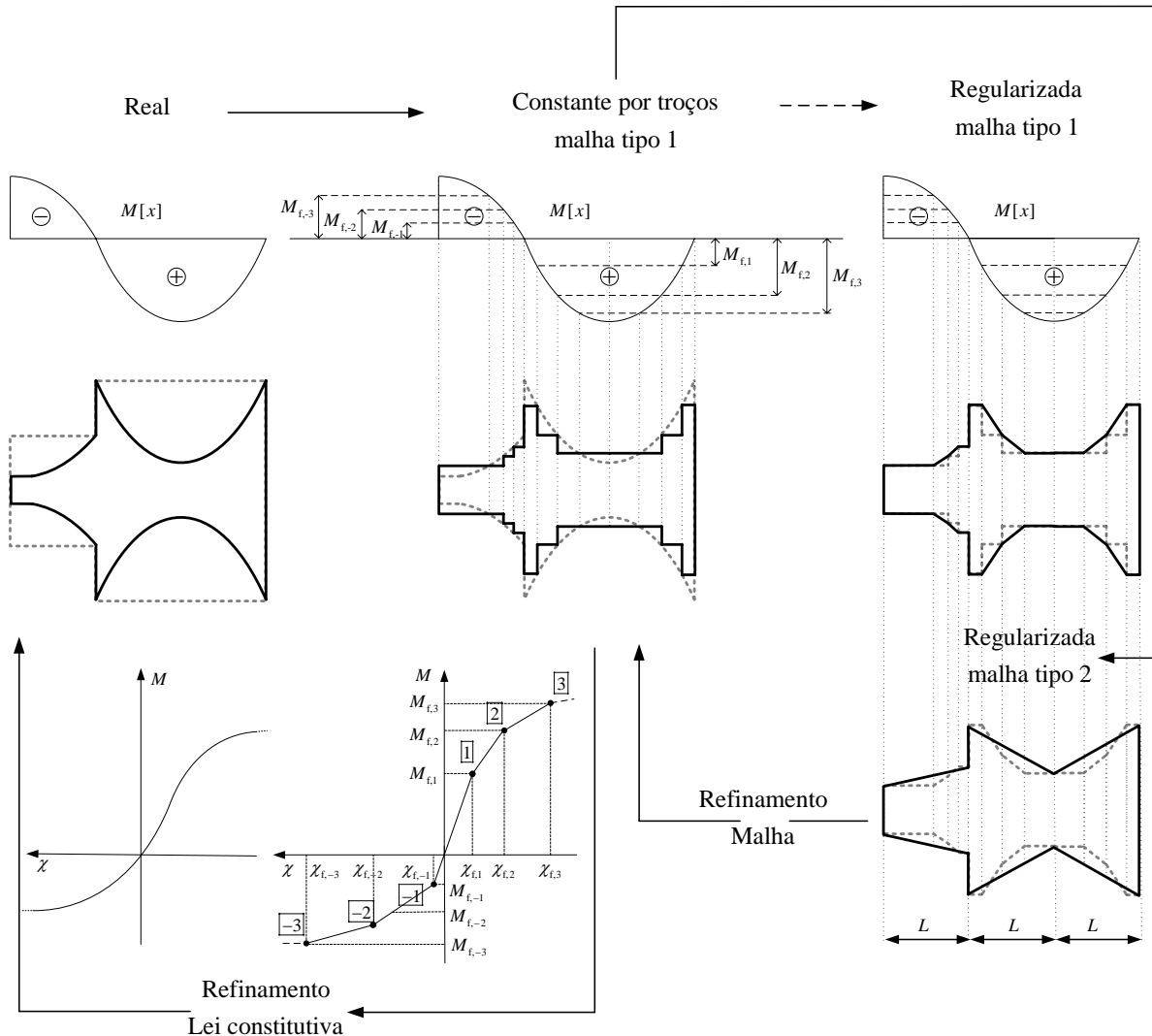


Figura 2. Distribuição da rigidez de flexão.

2.2 Relações momento curvatura

Considere-se a relação momento-curvatura (por exemplo, para momentos flectores positivos)

$$M[\chi] = \begin{cases} -EI_0 \chi, & 0 \leq -\chi \leq -\chi_{f,1} \\ -EI_1(\chi - \chi_{*,1}), & -\chi_{f,1} < -\chi \end{cases} \quad (2)$$

em que EI_j é a rigidez de flexão no regime $j \in \{0,1\}$, $\chi_{f,1}$ é a curvatura correspondente à mudança de regime e $\chi_{*,1}$ é uma pré-curvatura dada pelo traço no eixo das abcissas do (prolongamento do) segundo troço da lei constitutiva. Como se constata na Fig. 3a,

$$M_{f,1} = EI_0(-\chi_{f,1}) = EI_1(\chi_{*,1} - \chi_{f,1}) \Rightarrow \chi_{*,1} = -\frac{\Delta EI_1}{EI_1} \chi_{f,1} = -\beta_{1,1} \chi_{f,1} \quad (3)$$

tendo-se definido as variações de rigidez absoluta ΔEI_j e relativa $\beta_{j,k}$,

$$\Delta EI_j \equiv EI_0 - EI_j \quad \text{e} \quad \beta_{j,k} \equiv \Delta EI_j / EI_k \quad (4)$$

A lei constitutiva (2) pode então ser rescrita na forma

$$M[\chi] = \begin{cases} -EI_0 \chi, & 0 \leq -\chi \leq -\chi_{f,1} \\ -EI_1 \left(\chi + \frac{\Delta EI_1}{EI_1} \chi_{f,1} \right), & -\chi_{f,1} < -\chi \end{cases} \quad (5)$$

Defina-se agora o momento calculado com a rigidez de flexão inicial, ou momento flector total, \bar{M} ,

$$\bar{M} \equiv -EI_0 \chi \quad (6)$$

A expressão do segundo regime da lei constitutiva em (5) vem então

$$\begin{aligned} M[\chi] &= -EI_1 \chi - \Delta EI_1 \chi_{f,1} - EI_0 \chi + EI_0 \chi = -EI_0 \chi + \Delta EI_1 (\chi - \chi_{f,1}) \\ &= \bar{M} - \frac{\Delta EI_1}{EI_0} (\bar{M} - M_{f,1}) = \bar{M} - M_{fM} \quad , \quad -\chi_{f,1} < -\chi \end{aligned} \quad (7)$$

onde o momento fictício material M_{fM} , para uma dada curvatura, é definido por, ver Fig. 3b,

$$M_{fM} = \bar{M} - M = \beta_{1,0} (\bar{M} - M_{f,1}) = -\Delta EI_1 (\chi - \chi_{f,1}) \quad (8)$$

Na versão discreta do MFF o momento flector fictício nas extremidades de cada elemento é definido por (8) e assume-se que a sua variação no interior do elemento é linear. Adoptando a convenção da Fig. 1 para os momentos fictícios nas extremidades do elemento, estes são iguais àqueles esforços, e daí que M_{fM} denote indistintamente os momentos fictícios e os correspondentes momentos flectores fictícios.

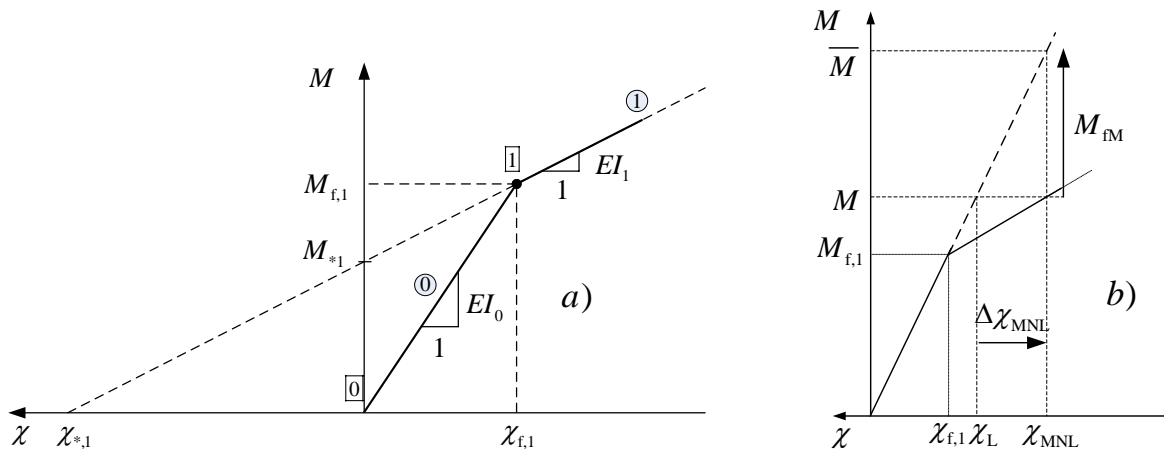


Figura 3. a) Lei constitutiva bilinear b) momento flector fictício.

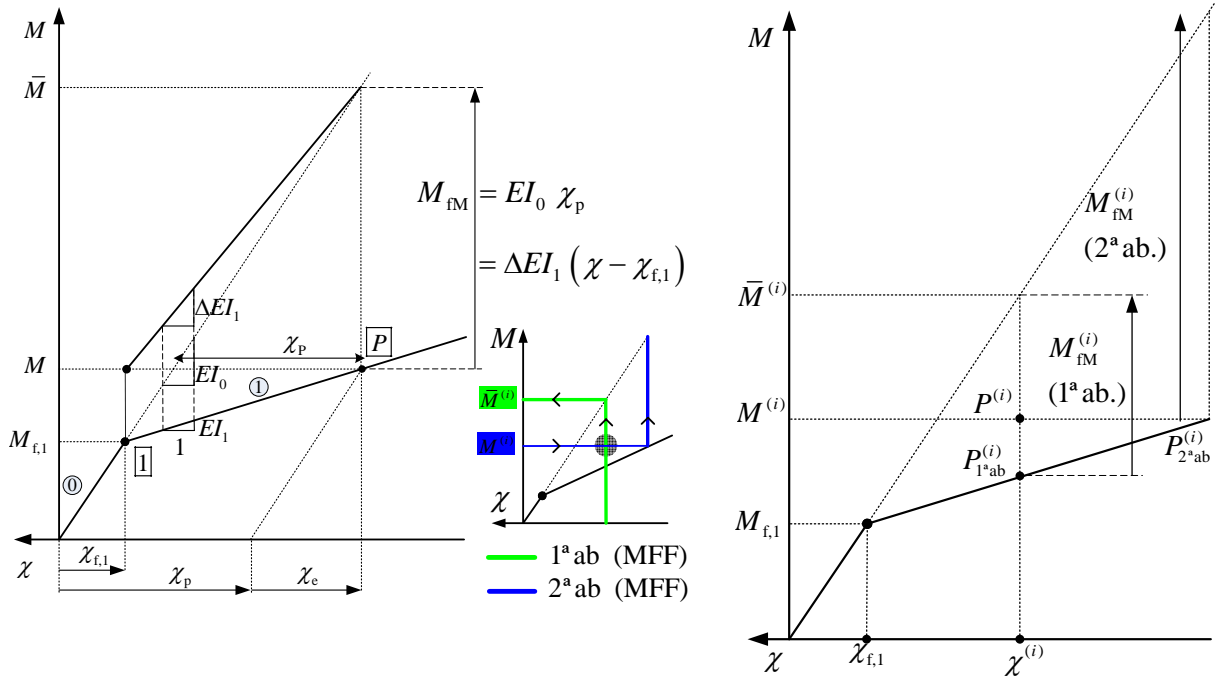


Figura 4. a) Momento fictício do MFF b) e c) 1ªab vs 2ª ab do MFF.

2.3 Comparação das duas abordagens do MFF

A 1ªab. e 2ªab. do MFF são traduzidas por duas fórmulas de iteração distintas. Em cada iteração supõe-se conhecido na 1ªab. o campo de deformações do problema, e na 2ªab. o campo de momentos flectores, ver Fig. 4b. Ambas as fórmulas de iteração utilizam para estimativa inicial a solução linear elástica. Apresentam-se seguidamente as correspondentes fórmulas de iteração e expressões do carregamento fictício.

2.3.1 Primeira abordagem do MFF

Na análise de uma estrutura hiperestática admita-se conhecida uma estimativa para a solução não linear do problema numa dada secção – ponto $P^{(i)}$ da Fig. 4c. Na 1ªab. do MFF admite-se que a curvatura (mas não o correspondente momento flector) nesse ponto coincide com a curvatura do ponto P - solução exacta. Deste modo, a componente “não recuperável” da curvatura χ_p vem, ver Fig. 4a,

$$\chi_p = \chi - \chi_e = -\frac{M_{fm}}{EI_0} = \frac{\Delta EI_1}{EI_0} (\chi - \chi_{f,1}) \quad (9)$$

Na Fig. 4a identifica-se ainda o momento flector M_{fm} definido por (8), que coincide com a variação do momento flector devida à não linearidade. A curvatura residual χ_p é modelada por meio de um carregamento suplementar fictício, que introduz o momento flector M_{fm} , o que justifica a designação atribuída. Para melhor compreensão do significado físico do artifício proposto sugere-se a leitura de [12] onde Lin apresenta um modelo físico de grande valor didáctico.

O carácter iterativo da 1ªab. do MFF (no que respeita à não linearidade material) resulta do desconhecimento *a priori* do campo de deformações não linear do problema. Por outras palavras, o ponto P na Fig. 4c não é, contrariamente ao que se admitiu acima, a solução exacta do problema. É pois necessário um processo iterativo que actualize o momento fictício dado por (8) e que seja interrompido quando o ponto $P^{(i)}$ definido na Fig. 4c satisfizer a lei constitutiva com uma precisão pré-definida, ou seja, quando a curvatura introduzida pelo carregamento fictício originar um momento flector verificando aproximadamente a lei constitutiva. Para o caso n-linear tem-se para a 1ªab.,

$$M_{\text{fM}}^{(i)} = \sum_{j=1}^r \beta_{j,0} (\bar{M}_{s,j+1} - \bar{M}_{s,j}) \quad \text{com} \quad \bar{M}_{s,r} = \bar{M}^{(i)} \quad \text{e} \quad \bar{M}_{s,k} = \bar{M}_{f,k} \quad \text{para} \quad k < r \quad (10)$$

em que $\bar{M}_{f,k}$ é o momento flector linear correspondente à curvatura $\chi_{f,k}$, ver Fig. 5, e r é o troço da relação constitutiva onde se situa a estimativa do momento flector na iteração (i).

2.3.2 Segunda abordagem do MFF

Na 2ªab. do MFF supõe-se que o momento flector (mas não a curvatura) do ponto $P^{(i)}$ da Fig. 4c coincide com o momento flector do ponto P - solução exacta, Fig. 4c. A componente “não recuperável” da deformação χ_p vem, ver Fig. 4a,

$$-\chi_p = \frac{M - M_{f,1}}{EI_1} + \frac{M_{f,1}}{EI_0} - \frac{M}{EI_0} = \left(\frac{1}{EI_1} - \frac{1}{EI_0} \right) (M - M_{f,1}) = \frac{\Delta EI_1}{EI_1 EI_0} (M - M_{f,1}) \quad (11)$$

de modo que o momento fictício que introduz a curvatura χ_p é agora definido por

$$M_{\text{fM}} = -EI_0 \chi_p = \frac{\Delta EI_1}{EI_1} (M - M_{f,1}) = \beta_{1,1} (M - M_{f,1}) \quad (12)$$

O carácter iterativo da 2ªab. do MFF no que respeita à não linearidade material resulta do desconhecimento *a priori* do campo do momento flector não linear do problema. Por outras palavras, o ponto P na Fig. 4c não é, contrariamente ao que se admite acima, a solução exacta do problema. É pois necessário um processo iterativo, que actualize o momento fictício dado por (12), que termina quando a curvatura originada pelo carregamento fictício satisfizer a lei constitutiva. Para o caso n-linear tem-se pois para a 2ªab.,

$$M_{\text{fM}}^{(i)} = \sum_{j=1}^r \beta_{j,j} (\bar{M}_{s,j+1} - \bar{M}_{s,j}) \quad \text{com} \quad \bar{M}_{s,r} = M^{(i)} \quad \text{e} \quad \bar{M}_{s,k} = \bar{M}_{f,k} \quad \text{para} \quad k < r \quad (13)$$

3. EXEMPLO

A viga de dois tramos, Fig. 5, usada para ilustrar a aplicação da 1ª ab.do MFF foi analisada por Aguado [5] que apresenta a relação momento-curvatura linearizada da Fig. 5.

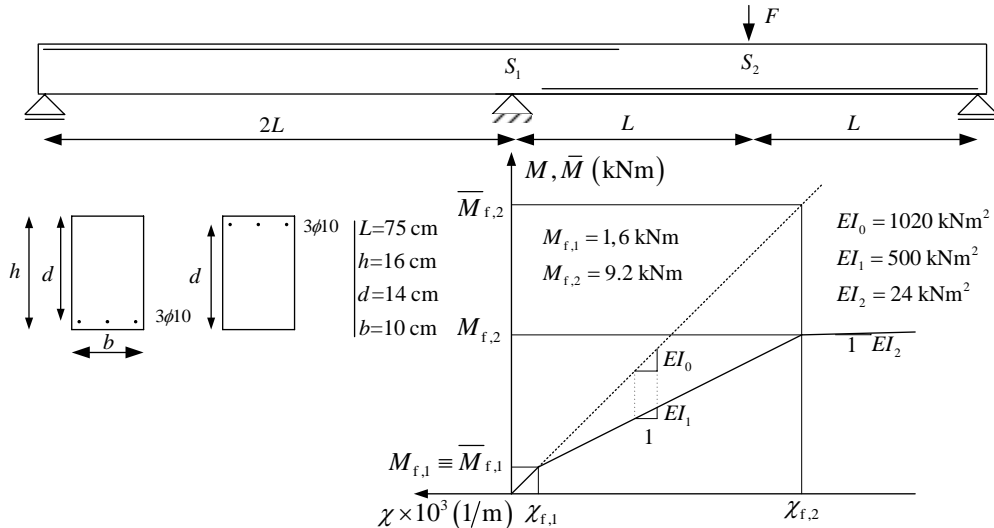


Figura 5. Exemplo de aplicação.

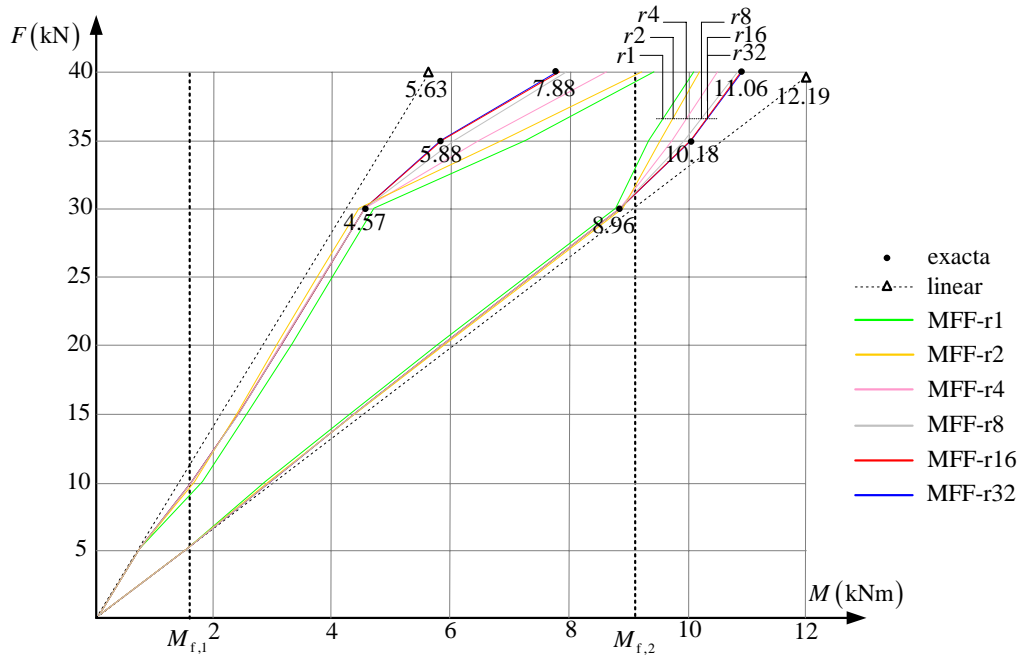


Figura 6. Relação força-momento flector nas secções S1 e S2.

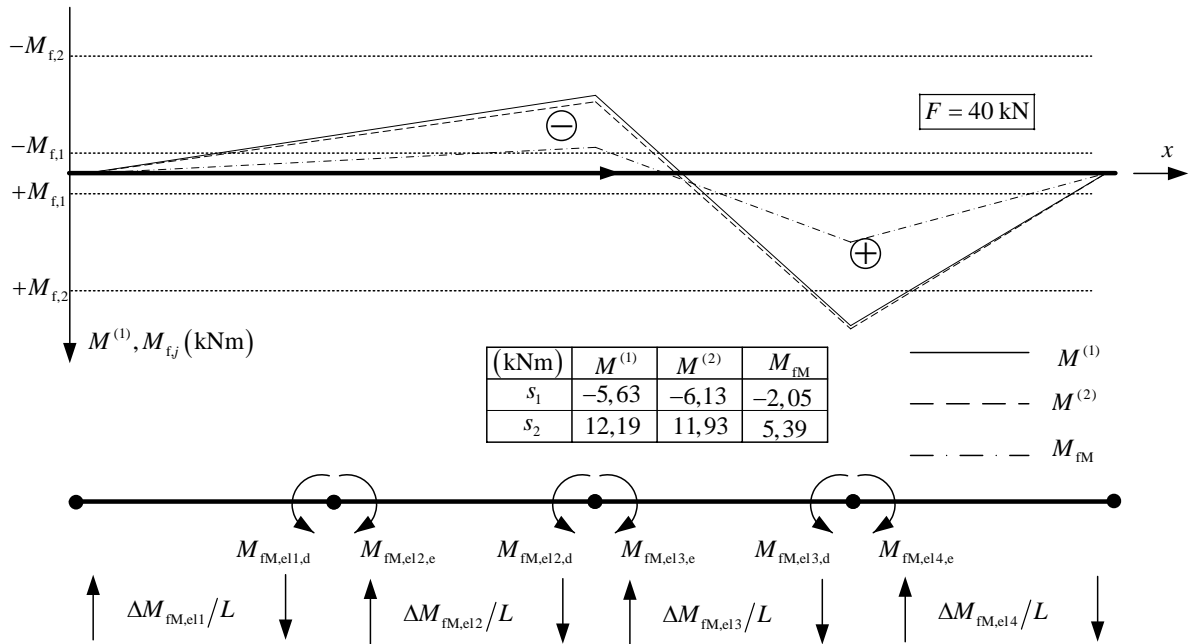


Figura 7. Segunda iteração para o exemplo apresentado (malha r1).

Na análise pelo MFF, foram definidas, por subdivisão sucessiva, seis malhas uniformes de elementos finitos designadas r_i , sendo $4i$ o número de elementos e monitorizou-se o valor do momento flector nas secções S1 e S2, tendo-se obtido a relação força-momento flector da Fig. 6 para incrementos de carga de 5 kN. O Quadro 1 apresenta o resultado do estudo de convergência relativo ao método dos elementos finitos. A Fig. 7 ilustra a segunda iteração do MFF para $F = 40$ kN, representando:

- os diagramas de momentos flectores linear e da segunda iteração, respectivamente, $M^{(1)}$ e $M^{(2)}$;
- o carregamento fictício para a malha r1 em que

$$M_{fM,e11,d}^{(1)} = M_{fM,e12,e}^{(1)} = \beta_{1,0} (\bar{M}^{(1)}[L] - \bar{M}_{f,1}[L]) = \frac{1020-500}{1020}(-2,81+1,9) \\ = -0,62 \text{ kNm}$$

$$M_{fM,e12,d}^{(1)} = M_{fM,e13,e}^{(1)} = \beta_{1,0} (\bar{M}^{(1)}[2L] - \bar{M}_{f,1}[2L]) = \frac{1020-500}{1020}(-5,63+1,9) \\ = -2,05 \text{ kNm} \quad (14)$$

$$M_{fM,e13,d}^{(1)} = M_{fM,e14,e}^{(1)} = \beta_{2,0} (\bar{M}^{(1)}[3L] - \bar{M}_{f,2}[3L]) + \beta_{1,0} (\bar{M}_{f,2}[3L] - \bar{M}_{f,1}[3L]) \\ = \frac{1020-24}{1020}(12,19-9,2) + \frac{1020-500}{1020}(9,2-1,6) \\ = 6,79 \text{ kNm}$$

(iii) o campo de esforços fictício $M_{fM}^{(1)}$.

Quadro 1. Máximo valor absoluto do erro relativo em S1 e S2 em percentagem da solução exacta.

F(kN)	r1	r2	r4	r8	r16	r32
30	3.42	2.10	0.07	0.01	0.02	0.01
35	24.71	17.88	11.10	3.90	0.24	0.09
40	21.16	18.55	10.83	2.07	0.57	0.03

Quadro 2. Número de iterações para erro admissível de 1%, 5% e 10%, respectivamente.

F(kN)	r1	r2	r4	r8	r16	r32
30	2/2/2	2/2/2	2/2/2	2/2/2	2/2/2	2/2/2
35	32/18/12	49/28/18	65/32/18	72/31/13	60/22/6	59/22/5
40	16/13/11	33/25/19	74/42/28	74/40/24	72/37/44	68/35/21

Quadro 3. Diferença relativa entre os momento flector linear e não linear exactos na secção S1.

F(kN)	30	35	40
	-7.73	-16.35	-28.58

A solução exacta facilmente se obtém dadas as características do problema e, particularmente, da relação constitutiva. Para cada malha é considerada exacta a solução com erro relativo entre iterações sucessivas menor que 10^{-6} . O Quadro 2 apresenta o número de iterações necessário para obter soluções com erro relativo inferior a 1%, 5% e 10% relativamente à solução obtida após convergência para cada malha. O Quadro 3 quantifica a não linearidade material presente neste exemplo. Nos Quadros 1, 2 e 3 figuram apenas os três últimos incrementos de carga porque:

- (i) só então são atingidos nas secções críticas valores para o momento flector superiores a $M_{f,2}$ (correspondente à cedência das armaduras, ver Fig. 6), e
- (ii) para o incremento de 30 kN o erro é inferior a 1% logo na segunda iteração (primeira após a linear).

4. CONCLUSÃO

Nesta comunicação apresenta-se a descrição discreta MFF. A comunicação focaliza-se numa descrição física do método, com vista à sua aplicação prática. O exemplo ilustra a aplicação expedita do método.

REFERÊNCIAS

- [1] GALA, P. - O método das forças fictícias na modelação da não linearidade material em estruturas reticuladas, Tese de Mestrado, Universidade de Coimbra, 2007.
- [2] CEB-FIP, Model Code 1990 – Design Code. Thomas Telford Services Ltd, 437.
- [3] CEN EN 1992-1-1 2004, Eurocode2: Design of Concrete Structures - Part 1-1: General Rules and Rules for Buildings.
- [4] CEB Bulletin n.º 103 - Manuel de Calcul - Flambement Instabilité, Comité Euro-International du Béton, 1974.
- [5] AGUADO, A. – Estudio del Analisis no Lineal de Estructuras de Hormigon Mediante Superposition de Problemas en Deformaciones. Barcelona: Universidad Politecnica de Barcelona, 1980. Tese de Doutoramento.
- [6] MARI, A.; Murcia, J. e Aguado A. - Second Order Analysis of Reinforced Concrete Frames. Em CEB Bulletin d'Information n. 153, 1982.
- [7] MORISSET, A. - Stabilité des Piles et des Pylônes - Théories et Méthodes de Calcul. Annales de L'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics n. 335, 1976.
- [8] CÂNCIO MARTINS, J.L. - Projecto de Execução da Ponte Ferroviária de Piscos Linha do Nordeste - Ligação Ferroviária Pocinho/Vila Franca das Naves - Viaduto de Piscos. Não construída, 1980.
- [9] ADAMS, P.F. - The Design of Steel Beam-Columns, Canadian Steel Industries Construction Council. Willowdale, Ontario, Canadá, 1974.
- [10] LUI, E.M. - A Practical p-delta Analysis Method for Type FR and PR Frames. Engineering Journal. AISC, 25, 3; 85-98, 1988.
- [11] CHEN W.F. e Lui, E.M. - Stability Design of Stability Frames. CRC Press, 1991.
- [12] LIN, T.H. - Theory of Inelastic Structures. John Wiley and Sons, 1968.
- [13] GALA, P., Providência, P. e Ferreira, M. - Sobre a Utilização de um Carregamento Fictício na Modelação do Comportamento Material não Linear: Congresso de Métodos Numéricos e Computacionais em Engenharia, CMNE CILAMCE, FEUP: Porto 2007
- [14] ZIENKIEWICZ, O.C.; Valliapan, S. e King, I.P. - Elasto-Plastic Solutions of Engineering Problems Initial Stress, Finite Element Approach. International Journal for Numerical Methods in Engineering. vol.1, 75-100, 1969.
- [15] ARGYRIS, J.H. e Scharpf, D.W. - Methods of Elastoplastic Analysis. Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP). Vol.23, 1972.