

## IV-30. On the Buckling Function for Masonry Walls

J. Lugez

Centre Scientifique & Technique du Bâtiment, Paris - France

### ABSTRACT

*The author of this paper draws attention to the negative aspects of adopting, for masonries of hollow units, a buckling function elaborated for solid concrete walls.*

*Methods for calculating the buckling function, derived from KUKULSKI's theory can be proposed, adapted to masonries or even to masonries made of hollow units.*

*Based on knowledge of the behaviour function ( $\sigma$ ,  $\epsilon$ ) of the masonry considered as a complex material, the proposed method would present an advantage in being a scientifically valuable basis for interpretation and generalisation of test results. Therefore it would avoid the use of empirical specific buckling functions which are generally unreliable as resulting from only a few tests.*

*L'auteur de cette communication attire l'attention sur les inconvénients de l'adoption, pour les maçonneries de produits creux, d'une fonction de flambement élaborée pour des murs pleins en béton.*

*Des adaptations aux maçonneries d'une méthode de calcul de la fonction de flambement dérivée de la théorie de KUKULSKI peuvent être proposées, même pour les maçonneries de produits creux.*

*Fondée sur la connaissance de la loi de comportement ( $\sigma$ ,  $\epsilon$ ) de la maçonnerie considérée comme un matériau complexe, la méthode proposée aurait pour avantage de constituer une base scientifiquement valable pour l'interprétation et la généralisation des résultats d'essais. Elle permettrait ainsi d'éviter le recours à des fonctions de flambement empiriques particulières, incertaines le plus souvent car résultant d'un faible nombre d'essais.*

*Der Verfasser der Mitteilung unterstreicht die Nachteile die die Annahme einer für massive Betonwände ausgearbeiteten Knickfunktion, im Falle des Mauerwerkes aus hohlen Steinen bietet.*

*Die Anpassung an das Mauerwerk, einer aus der Kukulskitheorie abgeleiteten Berechnungsmethode der Knickfunktion kann auch für Mauerwerk aus Hohlsteinen vorgeschlagen werden.*

*Die vorgeschlagene Methode die auf das Kennntnis des Verhaltensgesetzes des Mauerwerkes als komplexes Material beruht, bietet den Vorteil eine wissenschaftlich gültige Grundlage für die Interpretation und die Verallgemeinerung der Versuchsergebnisse darzustellen. Sie gestattet dadurch, auf besondere empirische Knickfunktionen die oftmals nicht vertrauenswürdig sind weil sie auf zu wenige Versuche beruhen, zu verzichten.*

*L'autore di questa comunicazione a ritenuto di sollecitare l'attenzione sugli inconvenienti dell'adozione, per le murature in blocchi (in laterizio o in clacestrizzo), una funzione d'instabilità elaborata per i muri monolitici in calcestruzzo.*

*Si può proporre di adattare alle murature e anche alle murature in blocchi un metodo di calcolo della funzione d'instabilità derivato dalla teoria di KUKULSKI.*

*Fondato sulla conoscenza della legge di comportamento della muratura considerata come un materiale complesso, il metodo proposto avrebbe il vantaggio di costituire una base scientificamente valide per l'interpretazione e la generalizzazione dei risultati di prove. Infatti permetterebbe di non ricorrere a delle funzioni d'instabilità particolari empiriche, il spesso incerte perchè risultano d'uno scarso numero di prove.*

### INTRODUCTION

Des Recommandations internationales pour le calcul des maçonneries sont actuellement en cours d'élaboration. Elles sont destinées à s'intégrer au Code Modèle qui, pour les différentes technologies de construction des structures résistantes, servira de guide aux auteurs des règlements nationaux de calcul. La rédaction de Recommandations pour le calcul des maçonneries a été confiée au groupe de travail animé par le Professeur LEWICKI et, au sein de ce groupe, elle est dirigée par Monsieur MOTTEU.

Une difficulté importante rencontrée dans la rédaction de ces Recommandations concerne la spécification de la

fonction de flambement. En raison de la très grande diversité des types de maçonneries et des matériaux pour maçonnerie, cette fonction ne peut être unique et l'on est tenté de proposer les fonctions de flambement particulières à certaines maçonneries choisies à titre d'exemples courants. Mais cela n'est guère satisfaisant puisque l'on ne peut pas couvrir ainsi la totalité du domaine d'application des Recommandations et surtout puisque l'on tend ainsi à donner valeur générale à des connaissances fragmentaires, fondées le plus souvent sur un faible nombre de résultats expérimentaux et dont le caractère empirique interdit l'extension à des valeurs de l'élancement et de l'excentricité sensiblement différentes de celles mises en jeu lors des essais.

Une autre solution a été proposée qui consiste à s'appuyer sur la fonction de flambement que les Recommandations CEB-CIB-UEA tc pour les structures en panneaux donnent pour les murs non armés.

Comme nous l'ont montré plusieurs tentatives d'application de cette fonction à l'interprétation de résultats d'essais de murs en maçonnerie, l'utilisation de cette fonction pour la maçonnerie n'est généralement pas satisfaisante. On le verra ci-après, il y a à cela de bonnes raisons.

A la question ainsi posée, il semble que l'on puisse proposer une réponse à caractère à la fois théorique et pratique. Elle consiste en une méthode de calcul, dont on a l'expérience pour un cas d'application assez complexe et qui servirait de support général à un ensemble de fonctions de flambement établies en tenant compte aussi bien des particularités du comportement mécanique de chacune des maçonneries considérées que de la répartition des vides éventuels dans les produits ou éléments de maçonnerie.

La présente communication expose les grandes lignes de cette solution en partant d'un rappel de la théorie de KUKULSKI d'où est issue la fonction de flambement des Recommandations CEB-CIB-UEA tc.

### LA THEORIE DE KUKULSKI'

Comme on le sait, la solution théorique du problème des éléments élancés soumis à une compression excentrée consiste en l'intégration de l'équation différentielle de la déformée de l'élément

$$\frac{d^2e}{dx^2} = - \frac{Ne}{EI} \quad (1)$$

où  $e$  est l'excentricité de la charge  $N$  dans la section  $x$ , le moment d'inertie de cette section et le module du matériau étant  $I$  et  $E$ .

L'intégration se heurte à des difficultés généralement insurmontables, parce que le produit  $EI$  est une fonction de  $x$ ; la fissuration, variable avec la section considérée entraîne des variations de  $I$ ; de plus, si, comme c'est le cas le plus fréquent, le matériau constitutif a une loi de comportement  $(\sigma, \epsilon)$  non linéaire, le module de déformabilité moyen dans une section dépend de la répartition des contraintes dans cette section, c'est à dire de l'excentricité  $e$ ; il est donc fonction de  $x$ .

Le principe de la méthode de Kukulski consiste à tourner la difficulté en donnant à l'équation différentielle son expression géométrique :

$$\frac{d^2e}{dx^2} = - \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{h} \quad (2)$$

formule dans laquelle  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  sont les déformations unitaires des fibres extrêmes de la section  $x$  et  $h$  est la hauteur de la section. Si l'on connaît la loi de comportement du matériau, on peut représenter les variations de  $\Delta\bar{e} = \bar{\epsilon}_1 - \bar{\epsilon}_2$  en fonction de l'excentricité relative  $\bar{e} = \frac{e}{h}$  de la force

agissant dans la section considérée, pour des valeurs données de la contrainte moyenne  $\sigma_0$  dans cette section. Pour plus de commodité, on utilise la contrainte moyenne ré-

duite qui, pour une section rectangulaire de longueur unité s'écrit :

$$\bar{\sigma}_0 = \frac{\sigma_0}{\sigma'_m} = \frac{N}{h\sigma'_m},$$

$\sigma'_m$  étant la résistance du matériau du mur en compression simple. On obtient ainsi les courbes en trait continu de la figure 1 établies pour un mur de section rectangulaire dont le matériau a une loi de comportement de type logarithmique (voir Figure 2).

Le domaine dans lequel les courbes tracées en trait continu mince pour diverses valeurs de  $\bar{\sigma}_0$  ont une signification pratique est délimité par une courbe en trait fort représentant la rupture qui survient lorsque le raccourcissement de la fibre la plus comprimée est égal au raccourcissement limite du matériau. C'est la rupture par épuisement de la résistance du matériau.

D'autre part, au moins pour certaines d'entre elles, les courbes  $\bar{\sigma}_0 = \text{cste}$  présentent un point anguleux qui correspond à la fissuration de la section. L'ensemble de ces points anguleux constitue la courbe de fissuration qui est asymptotique à l'axe des  $\bar{e}$  si le matériau est doué de résistance en traction et qui, au contraire, a un tracé oblique rapidement décroissant et coupant l'axe des  $\bar{e}$  pour  $\bar{e} = 0,166$  si le matériau est dépourvu de résistance en traction.

Avant et après la fissuration, les courbes  $\bar{\sigma}_0 = \text{cste}$  ont une allure très différente. L'arc de courbe correspondant à une section non fissurée est très tendu et il est représenté avec une bonne approximation par une relation linéaire  $\Delta\bar{e} = a\bar{e}$ ,  $a$  étant une constante dont la valeur est aisément calculée à partir de  $\bar{\sigma}_0$ . Ces relations linéaires sont représentées en trait interrompu sur le diagramme de la Figure 1.

L'arc de courbe représentant les variations de  $\Delta\bar{e}$  après fissuration de la section a une courbure beaucoup plus marquée et, pour des valeurs de  $\bar{\sigma}_0$  assez grandes ( $> 0,15$  par exemple), il ne s'écarte que d'assez peu d'une courbe dont

l'équation est du type  $\Delta\bar{e} = \frac{1}{(a_1 - a_2\bar{e})^2}$ ,  $a_1$  et  $a_2$  étant

calculés pour chaque valeur de  $\bar{\sigma}_0$  à partir des coordonnées des deux extrémités de l'arc sur la courbe de fissuration et sur la courbe de rupture. Ce tracé d'approximation est également représenté en trait interrompu sur le diagramme de la Figure 1.

Pour chaque valeur de  $\bar{\sigma}_0$ , on obtient ainsi une représentation analytique approchée des variations de  $\Delta\bar{e}$  en fonction de  $\bar{e}$  qui permet de donner à l'équation différentielle de la déformée la double expression suivante :

$$\frac{d^2\bar{e}}{dx^2} = - a\bar{e} \quad (3)$$

pour les sections non fissurées

$$\frac{d^2\bar{e}}{dx^2} = - \frac{1}{(a_1 - a_2\bar{e})^2} \quad (3)$$

pour les sections fissurées

L'intégration de ces deux équations, l'introduction des conditions aux limites ( $\bar{e} = \bar{e}_0$  dans les sections extrêmes



caractérisées par  $x = \frac{1}{2}$ , excentricité dans la section médiane  $x = 0$  égale à l'excentricité de rupture  $e_r$  lorsque la valeur de la fonction de flambement  $\phi$  est égale à la valeur  $\bar{\sigma}_0$  considérée) conduisent à la solution cherchée. On doit cependant tenir compte en outre d'un phénomène d'instabilité en raison duquel la ruine n'est pas atteinte par épuisement de la résistance du matériau dans la section médiane. Ce phénomène peut s'interpréter de la façon suivante sur le graphique de la Figure 1 si l'on considère qu'il représente les phénomènes dans la section médiane du mur. Soit un élément de mur élancé dont l'excentricité initiale  $\bar{e}_0$  (excentricité de la charge dans les sections extrêmes  $x = \pm \frac{1}{2}$ ) est égale à  $\bar{e}_\lambda$ . Pour  $\bar{\sigma}_0 = 0$ , l'excentricité  $\bar{e}_m$  dans la section médiane est aussi égale à  $e_\lambda$ . Lorsque la charge augmente, la variation de  $\bar{e}_m$  est représentée par un arc de courbe à pente positive. Si en un point tel que B, cet arc est tangent à une courbe  $\bar{\sigma}_0 = \text{cste}$ , l'équilibre ne peut exister au-delà du point B dans les conditions usuelles de chargement croissant puisque pour toute valeur  $\bar{e}_m > \bar{e}_{mB}$ , la contrainte moyenne  $\bar{\sigma}_0$  est inférieure à celle du point B. La ruine se produit donc en B par instabilité.

Les résultats sont présentés sous la forme de diagrammes représentant les variations de la fonction de flambement  $\phi$  en fonction de l'élancement pour diverses valeurs de l'excentricité initiale  $\bar{e}_0$ .

L'élancement intervient sous la forme de l'élancement réduit  $\bar{\lambda} = \frac{1}{h\sqrt{\alpha}}$ ,  $\alpha$  étant le rapport  $\frac{E_0}{\sigma'_m}$  entre le module tangent initial et la résistance en compression simple du matériau du mur.

### Remarques

La théorie de Kukulski repose sur le fait que grâce à la forme de leur second membre, les équations (3) sont directement intégrables. En d'autres termes, elle ne vaut que dans la mesure où la représentation analytique des courbes  $(\Delta\bar{e}, \bar{e})$  de la Figure 1 par des équations du type  $\Delta\bar{e} = a\bar{e}$  et  $\Delta\bar{e} = \frac{1}{(a_1 - a_2\bar{e})^2}$  est acceptable.

Cette représentation est rigoureuse pour des murs de section rectangulaire dont le matériau a une loi de comportement linéaire.

Pour des murs de section rectangulaire, dont le matériau obéit à la loi de comportement logarithmique (Figure 2) adoptée par Kukulski pour le béton, l'approximation n'est plus acceptable dans le domaine des faibles valeurs de  $\bar{\sigma}_0$  où, pour les sections fissurées, les courbes  $(\Delta\bar{e}, \bar{e})$  présentent un point d'inflexion et, entre ce point et le point de début de fissuration, une concavité dirigée vers les grandes valeurs de  $\bar{e}$ .

Le domaine de validité de l'approximation se rétrécit encore lorsque la section n'est pas rectangulaire et cela d'autant plus que la forme de la section s'éloigne plus de la forme rectangulaire. En particulier, pour les sections éviées ou nervurées il apparaît nécessaire de recourir à un autre procédé de calcul.

### AUTRE METHODE DE CALCUL

Une détermination rigoureuse de la fonction de flambement de murs en maçonnerie de produits creux ne peut donc pas être fondée sur l'approximation de Kukulski dont il est nécessaire de s'affranchir.

Pour cela, on propose de substituer à la recherche d'une solution générale de l'équation différentielle de la déformée, la double intégration numérique de l'équation (2). Le principe général est alors le suivant :

A partir d'une loi de comportement connue, on établit le diagramme  $(\Delta\epsilon, \bar{\epsilon})$  pour les formes de section choisies.

Puis, on procède à la double intégration numérique en introduisant les conditions aux limites, l'élancement, etc. . . . Les résultats du calcul sont exploités en extrayant pour chaque couple de valeurs particulières des paramètres  $e_0$  et  $\lambda$ , la valeur maximale de  $\bar{\sigma}_0$  qui est précisément la valeur  $\phi$  cherchée. Quelques difficultés résultant de la forme des courbes  $(\Delta\epsilon, \bar{\epsilon})$  peuvent être parfois rencontrées, durant le calcul, principalement lorsque le matériau constitutif du mur possède une certaine résistance à la traction (ce qui n'est d'ailleurs généralement pas le cas de la maçonnerie). Ce type de difficulté a été examiné à l'occasion d'une application particulière de la méthode<sup>2</sup>.

L'avantage principal de celle-ci est sa grande souplesse. On peut en effet introduire la relation  $(\sigma, \epsilon)$  que l'on estime la plus représentative de la loi de comportement de la maçonnerie étudiée. Il n'est d'ailleurs pas nécessaire d'en connaître l'expression analytique et une définition numérique assez fine suffit. Cela permet d'appliquer les principes exprimés par les Recommandations pour la maçonnerie qui préconisent de soumettre à des charges centrées des murets de hauteur faible, telle que l'élancement n'intervienne pas et, ainsi, de déterminer la relation  $(\sigma, \epsilon)$  du matériau composite qu'est la maçonnerie.

Il est intéressant de souligner à cet égard que des changements même modérés apportés à la loi de comportement du matériau peuvent avoir des répercussions sensibles sur la fonction de flambement. La Figure 3<sup>1</sup> en montre un exemple :

Elle représente les variations de la fonction de flambement  $\phi$  en fonction de l'élancement : pour chacune des trois valeurs de l'excentricité initiale, trois courbes sont données, chacune d'elles correspondant à l'une des lois de comportement représentées sur la Figure 2 et caractérisées par la valeur de  $k$ . Sans être considérable, l'influence des variations de  $k$  n'est pas négligeable dans le domaine des élancements modérés. Une fois le programme de calcul établi pour un type donné de section, il est d'ailleurs facile de procéder au calcul à partir des fonctions  $(\sigma, \epsilon)$  qui limitent le faisceau des fonctions que, d'après les résultats d'essais, il est possible d'envisager. Ainsi aura-t-on un élément d'évaluation précis de l'ampleur des répercussions des approximations faites.

La méthode s'applique également à des formes assez variées de la section. C'est ainsi qu'elle a été utilisée pour toute une gamme de murs nervurés en béton non armé<sup>2</sup>.

La figure 4 donne la représentation des sections élémentaires considérées, tandis que les Figures 5, 6 et 7 per-

mettent d'apprécier les variations de la fonction de flambement avec la forme de la section ou, pour une section dissymétrique par rapport au plan moyen du mur, avec la position du point d'application de la charge par rapport à ce plan moyen.

### APPLICATION AUX MACONNERIES DE PRODUITS CREUX

Pour l'application à des maçonneries de produits creux, certaines précautions seraient à prendre afin de tenir compte de la répartition des vides dans l'épaisseur du mur. En particulier si, comme c'est le cas pour les maçonneries de briques creuses à alvéoles horizontaux, les sections transversales du mur montrent une répartition très discontinue de la matière, il faut que le processus de calcul rende compte de cette répartition. Pour cela la relation  $(\sigma, \epsilon)$  déterminée pour la maçonnerie et qui vaut donc pour la section horizontale brute, parties pleines et parties vides confondues, doit être transformée pour ne s'appliquer qu'aux parties pleines de la section courante. Ce sont ces parties pleines qui seules seront introduites dans la détermination de la

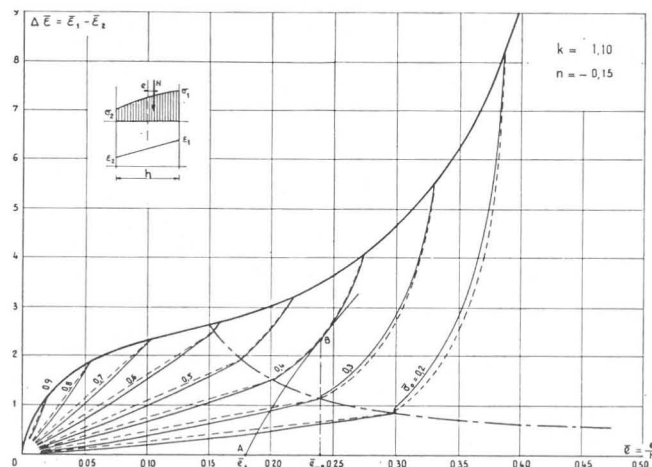


Figure 1. Variation de  $\Delta\epsilon(\bar{\epsilon})$  dans une section rectangulaire pour diverses valeurs de la contrainte relative moyenne  $\bar{\sigma}_0 = \frac{\sigma_0}{\sigma'_m}$

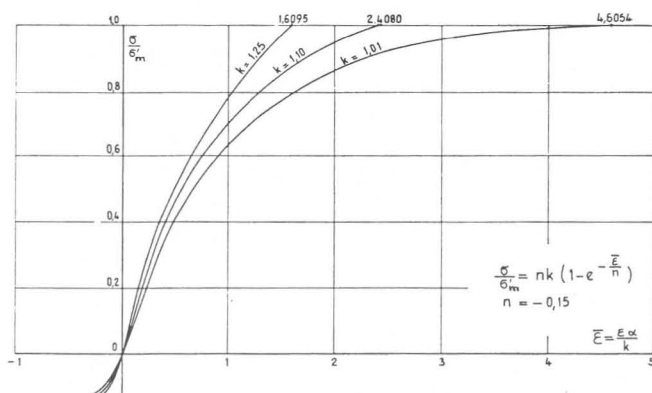


Figure 2. Loi de comportement logarithmique.

relation  $(\Delta\epsilon, \bar{\epsilon})$  à partir de laquelle on procède à la double intégration.



Fondée sur une connaissance effective de la fonction  $(\sigma, \epsilon)$  de la maçonnerie, cette méthode offrirait l'avantage de constituer pour l'interprétation des résultats d'essais une base scientifiquement valable, puisqu'elle prend en considération les effets du second ordre. Convenablement confirmée par l'expérimentation, elle permettrait d'en généraliser les résultats et éviterait ainsi le recours à des fonctions de flambement empiriques particulières établies à partir d'essais en nombre nécessairement insuffisant.

### BIBLIOGRAPHIE

1. W. KUKULSKI, J. LUGEZ — Résistance des murs en béton non armé soumis à des charges verticales. Cahier CSTB n° 681 avril 1966.
2. J. LUGEZ — Résistance sous charges verticales centrées ou excentrées d'éléments de murs nervurés élancés en béton non armé. Cahier CSTB n° 1319 — juin 1975.

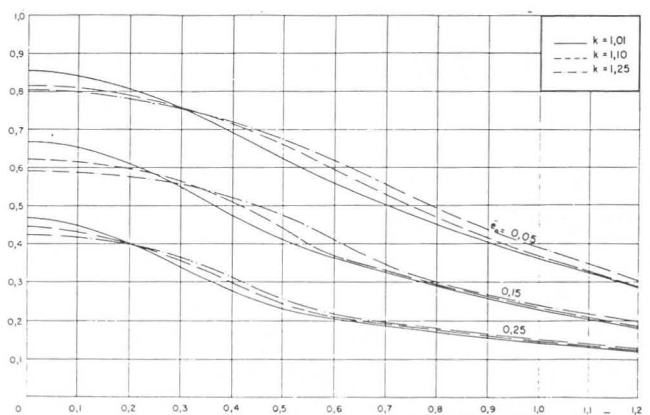


Figure 3. Influence sur les valeurs de  $(\phi, \bar{\epsilon}, \bar{\lambda})$  des variations du paramètre  $k$ .

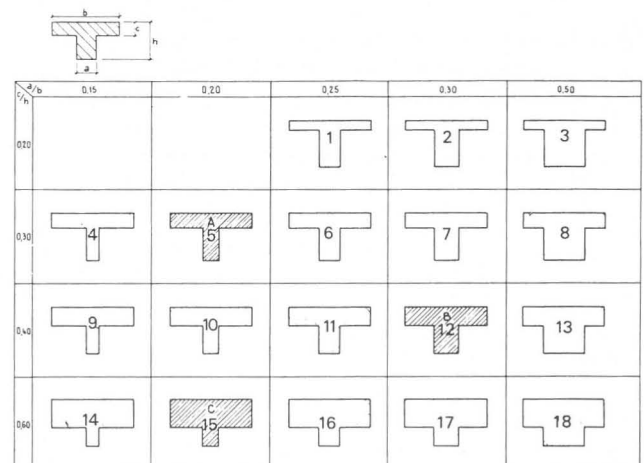


Figure 4. Nomenclature des formes de section nervurée retenues.



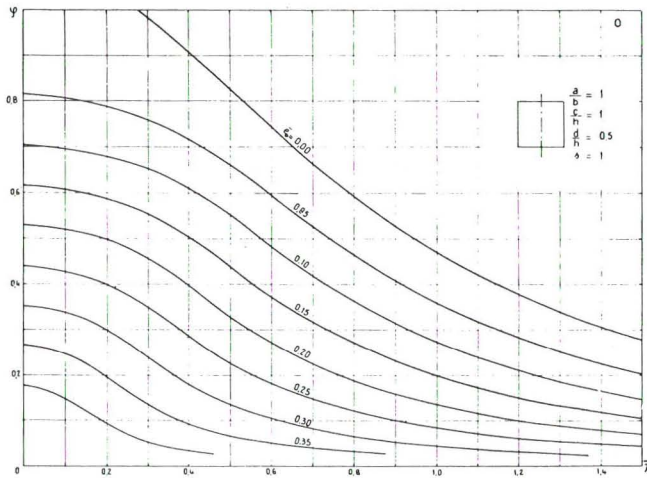


Figure 5. Fonction de flambement pour une section rectangulaire. La loi de comportement est celle de la figure 2 avec  $k = 1,1$  et  $n = 0$  (pas de résistance en traction). La charge est appliquée aux extrémités à une distance  $e_0$  du plan mécanique moyen.

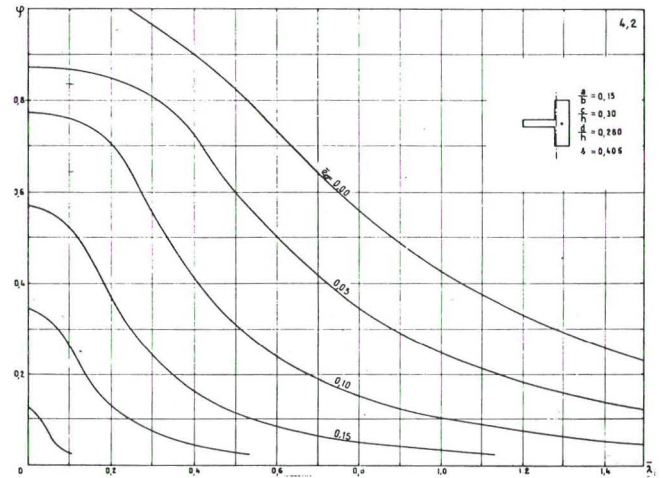


Figure 7. Fonction de flambement pour la section nervurée de la figure 6. Par rapport au plan mécanique moyen, la charge est appliquée du côté du voile. Même loi de comportement du matériau que pour les figures 5 et 6.

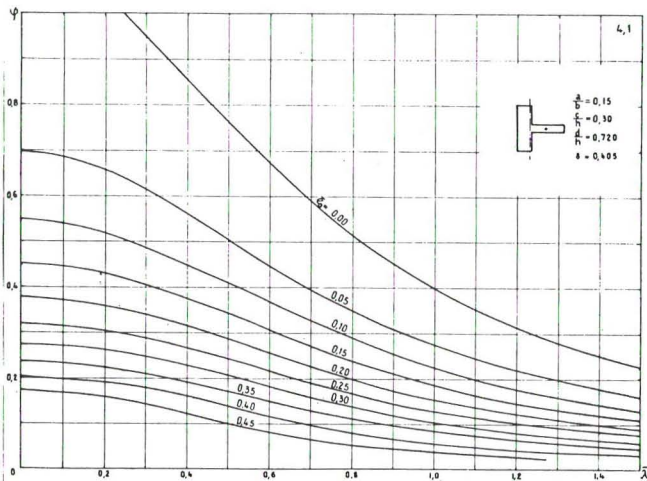


Figure 6. Fonction de flambement pour une section nervurée particulière. Par rapport au plan mécanique moyen, la charge est appliquée du côté des nervures. La loi de comportement du matériau est la même que pour la figure 5.