

## **Soluzione numerica dello stato fessurativo in lastre piane di muratura ordinaria o armata**

( A numerical model of plain or reinforced masonry behaviour in postcracking stages)

A. Bernardini (\*), P. Rossetto (\*\*), A. Sproccati (\*\*), R. Vitaliani (\*)

(\*) Istituto Costruzioni, Ponti e Strade, Università di Padova, Italy.

(\*\*) Structural Civil Engineering Doctor, Università di Padova, Italy.

### SOMMARIO

Vengono presentati i risultati dell'analisi per elementi finiti della evoluzione dello stato di tensione con l'evolversi delle fessurazioni in pannelli di muratura semplice e armata; la simulazione numerica si riferisce alle prove sperimentali condotte presso l'Università di Padova ed il laboratorio ZRMK di Ljubljana nell'ambito di una ricerca sulle caratteristiche di deformabilità e di resistenza a rottura delle strutture murarie ordinarie e armate, con particolare riferimento a sollecitazioni di origine sismica.

Tali simulazioni consentono di studiare i complessi meccanismi di rottura delle murature ordinarie e armate, confermando e indirizzando le parallele indagini sperimentali.

Il programma è utilizzabile inoltre per la simulazione di strutture di c.a. e quindi per esempio per lo studio dell'effetto di tamponature di muratura in telaio di c.a., e per l'analisi di problemi di " contatto unidirezionale".

### ABSTRACT

A finite element analysis of postcracking stages of plain or reinforced masonry panels is presented.

This numerical analysis was carried out to obtain theoretical models of the behaviour of masonry walls, tested during a joint research program performed by University of Padova (Italy) and ZRMK Laboratory ( Ljubljana, Yugoslavia), on the resistance and deformability, particularly in the seismic situation, of masonry structures.

The analysis can be used to study failure mechanism of plain or reinforced masonry walls, and to interpret and enhance experimental results.

The routine here presented can also simulate r.c. structural elements, or r.c. frames with infilled masonry panels.

#### 1. - PREMESSE

Lo sviluppo assunto negli ultimi anni dalle procedure numeriche per elementi finiti per la simulazione dei comportamenti meccanici, lineari e non lineari, dei materiali e delle strutture, ha reso disponibile uno strumento particolarmente efficace ed economico, che, accoppiato alle tradizionali tecniche di analisi sperimentale, consente di analizzare in modo approfondito problemi strutturali di grande complessità, quali quelli che devono essere affrontati per l'analisi di strutture in campo post-elastico.

Solo più recentemente è iniziata l'applicazione di tale metodologia nel campo delle strutture in muratura ordinaria e armata, per la cui simulazione è necessario risolvere e rappresentare in modo efficiente complessi comportamenti non lineari collegati alle fessurazioni dei blocchi, delle malte o alle plasticizzazioni delle armature, nonché gli effetti collegati alle condizioni di disomogeneità ed anisotropia, che già influenzano lo stesso campo di comportamento elastico lineare.

Si tratta di problemi parzialmente simili a quelli affrontati per la simulazione di strutture a lastra di c.a., in parte però originali e tipici delle murature.

Risulta pertanto spesso nè possibile, nè economico per le murature l'impiego di programmi generali sviluppati per lo studio del c.a..

Il programma che nel seguito verrà discusso si inquadra in questo campo di ricerca, ed è stato sviluppato nell'ambito di una ricerca sulle tecnologie di muratura armata, in particolare per quanto riguarda la loro applicazione nel campo delle costruzioni in zona sismica.

Il modello analitico qui introdotto interpreta le seguenti condizioni:

- non omogeneità ed anisotropia dei materiali;
- non linearità e dipendenza della storia di carico delle relazioni tra tensione e deformazione;
- fessurazione;
- scorrimento o apertura dei giunti di malta;
- plasticizzazione delle barre di armatura;
- interazione fra armatura e calcestruzzo, con possibilità di aderenza o

scorrimento.

## 2. - BREVI CENNI STORICI

Il progressivo affinamento del metodo degli elementi finiti, applicato all'analisi non lineare, ha portato a rapidi progressi nello studio analitico di strutture in calcestruzzo armato ed in particolare nell'interazione acciaio-calcestruzzo.

Mentre alcuni studiosi hanno condotto la ricerca su strutture con fessure predefinite ( Ngo e Scordelis /4/ ), la maggior parte di essi ha preferito indagare sulla propagazione delle fessure, accettando che la rottura, anziché svilupparsi lungo una linea, interessi per intero gli elementi, ortogonalmente alla direzione della tensione principale di trazione.

Tale scelta, fatta, tra gli altri, da Franklin, Valliapan, Abbasi e Colville, Nam, Cedolin e De Poli /12,13,2,14,15/ è più generale, in quanto consente di seguire l'evolvere della fessurazione e la distribuzione delle tensioni conseguente ad essa, risentendone peraltro la precisione nel comportamento locale ( tensioni presso le fessure ).

Più recentemente analoghe procedure sono state applicate alla simulazione del comportamento dei pannelli di muratura sottoposti a stati piani di tensione mediante schematizzazioni a micromodellazione, che descrivono tutti i componenti delle strutture con il loro mutuo collegamento, o con macromodellazione rispecchiante il comportamento medio delle strutture murarie, Page /10/11/, Arya e Hegemier /12/.

L'elemento usato più comunemente è il triangolo a deformazione costante /4,13,14,15,16/. Tuttavia tale elemento, oltre ad essere eccessivamente rigido /3/, mal si presta ad essere abbinato con l'armatura.

Secondo Schnobrich /3/, però, i risultati dell'elemento rettangolare a quattro nodi a variazione lineare degli spostamenti lungo i bordi, il cui stato di tensione viene valutato basandosi sui valori nel punto centrale, sono più soddisfacenti di quelli ottenibili dalla versione condensata dei quattro triangoli a tensione costante.

Si è scelto di utilizzare prevalentemente quindi l'elemento rettangolare a quattro nodi suddividendolo però in sottoregioni di verifica dello stato tensionale.

Nemmeno i procedimenti di calcolo sono unificati.

I primi storicamente sviluppati sono basati sulla modifica " step by step" della matrice di rigidezza e sono stati successivamente migliorati per ottenere procedure più efficienti, o più accurate, o più generali, ( Yuzugullu, Darwin /6,17/).

Più recentemente sono state sviluppate procedure più efficienti basate su soluzioni iterative a rigidezza costante e generalmente pari a quella iniziale elastica, ( Colville, J. e Abbasi, J.; Zienkiewicz e altri, /2,9/). di questa seconda categoria è il metodo qui impiegato che si è dimostrato particolarmente efficace, anche con l'utilizzazione del metodo frontale /20/, ed altri particolari criteri atti ad aumentarne la convergenza /1/.

Il programma nella versione attuale prevede elementi finiti rettangolari ( a quattro nodi ), triangolari ( a tre nodi ), isoparametrici ( 4,8,12,16 nodi), nonché gli elementi di giunzione e monodimensionali, entrambi a 2 nodi.

La possibilità di utilizzare l'elemento monodimensionale condensandolo in quello rettangolare /8,2/, consente di descrivere qualsiasi geometria della armatura senza subordinare ad essa la discretizzazione della struttura.

### 3. LEGGI COSTITUTIVE E CRITERI DI ROTTURA

#### 3.1 Comportamento degli elementi bidimensionali.

Il comportamento non lineare di elementi finiti bidimensionali di calcestruzzo o muratura soggetti a stati piani di tensione è caratterizzato dall'andamento tensione-deformazione nelle due direzioni principali, valutato a partire dai dati sperimentali e dalle conseguenti curve teoriche in stato monoassiale proposte e usate da vari autori, /7,8/; per stati biassiali viene utilizzato il procedimento " della deformazione monoassiale equivalente" /6/. Le espressioni analitiche e le caratteristiche delle curve sono riassunte nella tabella della Fig. 1.

Pur essendo state proposte inizialmente per il calcestruzzo, tali espressioni, particolarizzando opportunamente i valori dei parametri, consentono di schematizzare anche il comportamento delle murature.

Per quanto riguarda la muratura occorrerebbe però mettere in conto gli effetti di anisotropia di deformabilità e di resistenza collegati alla disposizione dei giunti di malta e all'impiego di blocchi forati.

Ciò richiede l'utilizzazione di leggi costitutive e criteri di resistenza

di tipo ortotropo /19/. Come verrà indicato nel seguito però, risultati ottimamente approssimati possono essere ottenuti con elementi finiti di tipo isotropo, particolareggiando in modo opportuno le costanti elastiche, a partire dai dati sperimentali di resistenza e deformabilità delle murature nelle due direzioni principali di anisotropia.

Si segnala in particolare che, in presenza di rilevanti azioni taglianti agenti sui piani dei giunti di malta, il modulo  $G$  rilevato sperimentalmente risulta considerevolmente inferiore al valore teorico  $E/2 \cdot (1 + \nu)$ , se le costanti ( $E, \nu$ ) sono rilevate su prove di compressione verticale /18/.

Per quanto riguarda infine il criterio di rottura per stati di tensione biassiale, la Fig. 2 mostra il criterio di interazione fra le tensioni principali suggerito da Kupfer, Hilsdorf, e Rüschi /5/.

Nel modello analitico si è adottato il più semplice criterio di rottura indicato in Fig. 2, già usato anche da altri studiosi /6,9/.

### 3.2 Comportamento della malta

La presenza della malta viene schematizzata tramite l'elemento giunzione per il quale si valutano le sollecitazioni in direzione ortogonale ( $\sigma$ ) e parallela al giunto ( $\tau$ ). Per ciascuna di queste due direzioni si considera un legame lineare tra tensione e deformazione, nella fase precedente la rottura, con rigidità  $K_h$  e  $K_v$ .

IL meccanismo di rottura nei giunti di malta coinvolge l'interazione fra tensione normale e tangenziale. Come curva involucro si è scelta quella proposta da Page /10/ e rappresentata in Fig. 3.

La Fig. 4 mostra un possibile andamento della tensione tangenziale in funzione dello scorrimento nel caso  $\sigma$  resti costante.

Va notato tuttavia che la tensione normale  $\sigma$ , in generale variabile, influenza la forma del diagramma ( $\tau$ - $\gamma$ ) in carico e scarico. Infatti la tensione tangenziale dovrà sempre essere inferiore alla tensione massima sviluppabile.

### 3.3 Comportamento dell'acciaio

L'acciaio delle armature viene schematizzato come materiale elasto-plastico ideale, limitato alla massima deformazione

### 3.4 Comportamento dell'aderenza

Si ammette che la tensione di aderenza non dipenda dalla tensione ortogonale alla barra; la legge (tensione - scorrimento relativo  $\epsilon_r$ ) assunta è diagram-

mata in Fig. 5.

Oltre  $\epsilon_{ur}$  (scorrimento ultimo relativo, si ammette che non vi sia più aderenza tra barra e calcestruzzo).

|                    | Espressione analitica  | Grafico | Commento   |
|--------------------|--|---------|--|
| Curva<br>Involuppo | $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$<br>$\eta = \frac{E \epsilon - \epsilon^2}{1 + (E-2) \epsilon}$  |         | In compressione:<br>ramo ascendente iperbolico con tg. orizzontale nel punto $(\epsilon_0, \sigma_c)$ , e tg. iniziale pari a $\epsilon_c$ ;<br>ramo discendente composto da una spezzata.<br><br>In trazione:<br>comportamento lineare fino al raggiungimento della massima tensione di trazione con conseguente rottura fragile. |
|                    | $\epsilon_0 < -\epsilon \leq \epsilon_1$<br>$\sigma = \sigma_c - \frac{(\sigma_c - \sigma_u)}{(\epsilon_1 - \epsilon_0)} (\epsilon - \epsilon_0)$  |         |  |
|                    | $\epsilon_1 < -\epsilon < \epsilon_u$<br>$\sigma = \sigma_u$   |         |  |
|                    | $\epsilon > 0$<br>$\sigma = E \epsilon$  |         |  |
| Curva di scarico   | $\eta = (\epsilon - \epsilon_p) \left[ \frac{A(\epsilon - \epsilon_A)}{\epsilon_A} + \frac{\eta}{(\epsilon_A - \epsilon_p)} \right]$<br>$A = 0.225 \epsilon_A^2 - 1.225 \epsilon_A + 1.85$<br>$\epsilon = \epsilon_A - \eta (\epsilon_A + \alpha) (\eta + \epsilon \alpha)$<br>$\alpha = 0.1175 \sqrt{\epsilon_A}$ |         | Curva di scarico parabolica.<br>Curva di ricarico rettilinea.<br>La posizione dei punti P e D dipende solo dalla posizione del punto A.<br><br>La forma delle curve di carico e scarico e quindi l'energia dissipata nel ciclo è governata dalla posizione del punto A.  |
| Curva di ricarico  | $\eta = E \beta (\epsilon - \epsilon_p) / (\epsilon_p + \beta)$<br>$\beta = 0.1002 \sqrt{\epsilon_A}$  |         |  |

Fig. 1

1) Kupfer, Hilsdorf, Rüsch in base a prove sperimentali

2) Assunto nel modello analitico

Fig. 2

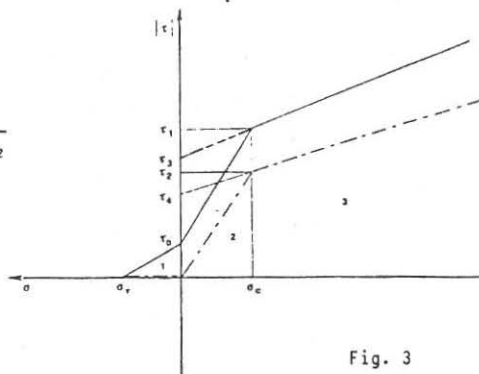


Fig. 3

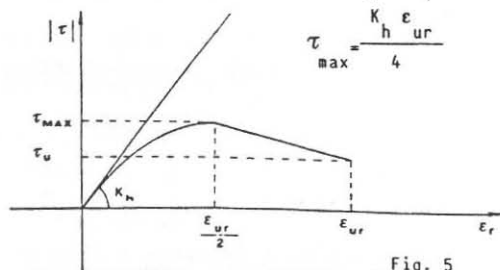


Fig. 5

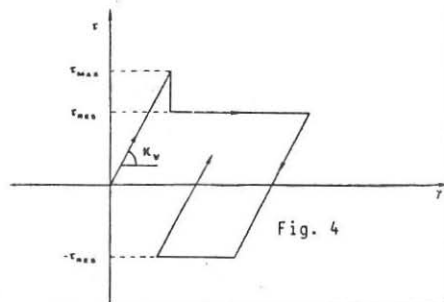


Fig. 4

#### 4. ESEMPI APPLICATIVI

Si riportano nel seguito alcuni esempi applicativi, il cui confronto con risultati sperimentali disponibili permette di stimare il grado di precisione della corrispondente simulazione.

4.1 Il primo esempio riguarda la simulazione del comportamento meccanico di un pannello di muratura ordinaria, confezionato con blocchi di laterizio normale ( tipo DOPPIO UNI, con percentuale di foratura del 41.5%, resistenza caratteristica a compressione, sull'area lorda in direzione parallela ai fori, pari a 20 MPa) e malta bastarda di calce e cemento ( resistenza caratteristica a compressione pari a 14 MPa), soggetto alla prova di compressione diagonale Fig. 6a . Nella Fig. 6b è indicata la micro-modellazione distinta dei blocchi e dei giunti di malta, nonché i valori dei parametri di rigidezza e resistenza definiti nel § 3.

La curva analitica 6 e indica il valore del carico D corrispondente al valore dello spostamento verticale  $\delta$  prefissato, e variabile in modo ciclico unidirezionale; la curva 6 f il valore della corrispondente deformazione orizzontale. Si osservano effetti di " caduta di resistenza" del pannello in corrispondenza del punto di rottura (8), effetti non rilevabili nelle curve sperimentali 6 c e 6 d, ottenute durante una prova a forza imposta, nelle quali i tratti tratteggiati indicano posizioni di equilibrio non stabilizzato. Nelle Fig. 6 g,h,i,l è indicato, per due livelli significativi dello spostamento imposto, lo stato fessurativo dei blocchi e dei giunti e la deformata del pannello amplificata di 50 volte.

Si evidenzia in particolare lo schiacciamento dei blocchi angolari ( per superamento della deformazione limite del 2.5%), schiacciamento evitato nella prova sperimentale mediante il dispositivo di ripartizione del carico indicato in Fig. 6 a.

4.2 Il secondo esempio riguarda la simulazione di una prova a rottura per spinta laterale di un pannello di muratura armata precompresso, secondo lo schema indicato in Fig. 7 a e ampiamente descritto in /18/.

In Fig. 7 b sono indicate le caratteristiche geometriche del pannello, realizzato con blocchi di laterizio alveolato a fori verticali ( percentuale di foratura: 45.5% ) e leggera armatura orizzontale e verticale ( percentuale totale sull'area lorda: 1% ). I fori in cui è inserita l'armatura verticale

sono iniettati con malta cementizia.

La micro-modellazione numerica prevede (Fig. 7 d) elementi finiti bidimensionali delle armature, puntuali dei giunti di interfaccia fra i blocchi ( giunti di malta ) e fra i blocchi e malta iniettata, fra blocchi e armatura orizzontale, ed infine fra blocchi dei corsi superiore ed inferiore e le strutture di contrasto del pannello, per simulare l'effetto della progressiva parzializzazione della zona di appoggio, al crescere della spinta laterale H. E' supposta invece aderenza perfetta fra malta iniettata e armatura verticale.

Il confronto indicato in Fig. 7 c evidenzia la buona approssimazione della curva inviluppo dei cicli sperimentali ottenuta con una prova simulata di deformazione imposta monotonicamente crescente, almeno nel campo iniziale di comportamento sostanzialmente elastico. La successiva fase caratterizzata da notevoli scorrimenti e distacchi dei giunti, evidenzia una maggiore rigidità del pannello reale rispetto al modello assunto. Ne risulta comunque una valutazione abbastanza corretta del massimo sforzo H.

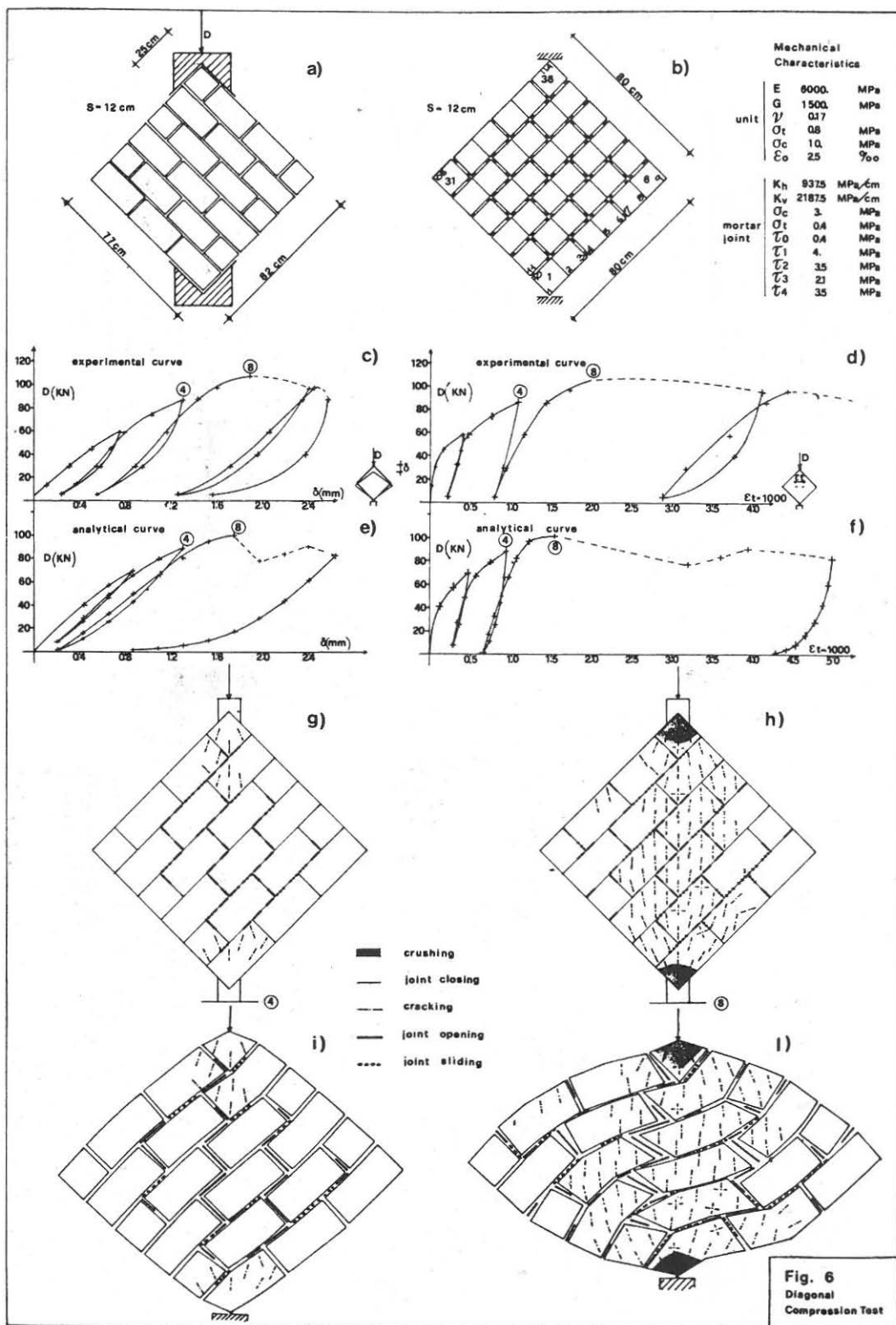
Il quadro fessurativo dei blocchi e dei giunti di malta è indicato in Fig. 7 e, in corrispondenza a tre fasi significative del carico. In Fig. 7 f il distacco alterno fra blocchi ed i nuclei verticali di malta cementizia armata, evidenzia l'effetto " spinotto", che risulta significativo agli effetti della trasmissione dello sforzo tagliante H.

In Fig. 7 g sono evidenziate le tensioni delle armature; si osserva come, in prossimità della rottura (punto(13)), la tensione nelle staffe orizzontali approssimi la tensione di snervamento, in corrispondenza alle sezioni dei blocchi fessurati a trazione.

4.3 IL programma consente di simulare anche storie di carico più complesse e variabili ciclicamente.

In Fig. 8 è indicata la simulazione del comportamento di un pannello sottoposto ad un ciclo simmetrico di deformazione imposta con condizione di vincolo e di carico indicati e corrispondenti alle prove eseguite con la procedura sperimentale presso il laboratorio ZRMK di Ljubljana /18/.





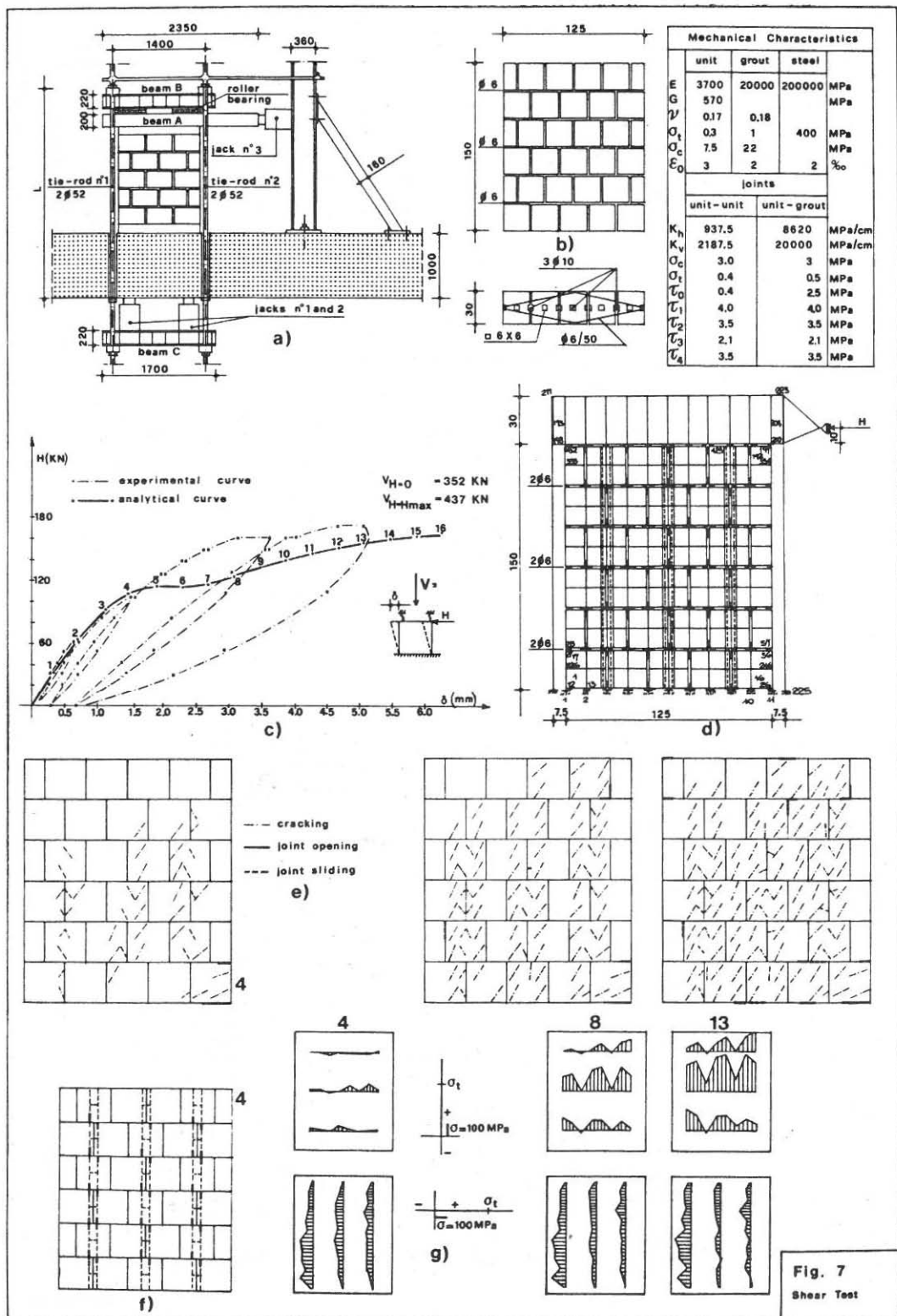
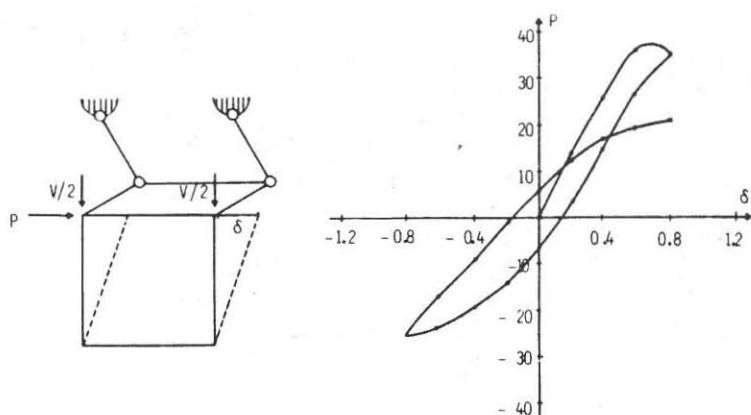


Fig. 7  
Shear Test



| Mechanical Characteristics |       |        |
|----------------------------|-------|--------|
| E                          | 6000. | MPa    |
| G                          | 1500. | MPa    |
| $\nu$                      | 0.17  |        |
| $\sigma_c$                 | 0.8   | MPa    |
| $\sigma_c$                 | 1.0   | MPa    |
| $\epsilon_c$               | 2.5   | ‰      |
| mortar joint               |       |        |
| $K_h$                      | 9315  | MPa/cm |
| $K_v$                      | 21815 | MPa/cm |
| $\sigma_c$                 | 3     | MPa    |
| $\epsilon_c$               | 0.4   | MPa    |
| $\epsilon_c$               | 0.4   | MPa    |
| $\epsilon_c$               | 4     | MPa    |
| $\epsilon_c$               | 3.5   | MPa    |
| $\epsilon_c$               | 2.1   | MPa    |
| $\epsilon_c$               | 3.5   | MPa    |

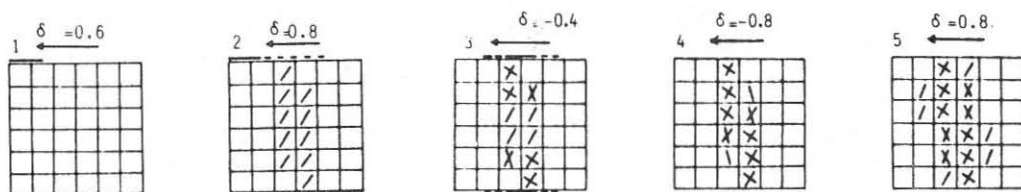


Fig. 8 ZRMK (Ljubljana) cyclic shear test macro-model

## 5. - CONCLUSIONI

Le procedure di calcolo oggi disponibili consentono di risolvere problemi anche complessi di simulazione con tempi di calcolo molto ridotti (dell'ordine di alcuni minuti per gli esempi sopra esposti), e quindi con costi notevolmente inferiori a quelli di sperimentazione diretta; risultano pertanto convenienti indagini sviluppate in parallelo con lo strumento numerico e sperimentale.

Tempi e costi di calcolo aumentano però rapidamente al crescere della complessità dei problemi trattati. L'interesse di tali procedure non è però collegata alla possibilità di simulare il comportamento complessivo di costruzioni murarie, ma di analizzare in modo approfondito comportamenti "locali" (ad es. di singoli pannelli compresi fra forature, di pannelli vincolati ai solai, eventualmente con fori, ecc.), dai quali però sostanzialmente dipende, almeno per edifici costruiti con una certa "regolarità", la loro sicurezza globale, ad esempio sotto azione sismica.

Su tali problemi sono in corso attualmente ulteriori indagini numeriche e sperimentali.

## BIBLIOGRAFIA

- /1/ Bernardini, A., Rossetto, P., Vitaliani, R., "Analisi per elementi finiti dell'evolversi delle sollecitazioni nelle strutture in calcestruzzo armato e in muratura" R.I. Istituto di Costruzioni, Ponti e Strade dell'Università di Padova, 1980.
- /2/ Colville, J., e Abbasi, J., "Plane Stress Reinforced Concrete Finite Elements", Journ. of the Struct. Div., ASCE, v.100 ST5, May 1974.
- /3/ Bazant, Z., Schnobrich, W., Scordelis, A., "Analisi delle strutture in cemento armato mediante il metodo degli elementi finiti" Costruzioni in c.a., Studi e rendiconti, Pol. di Milano, 1978.
- /4/ Ngo, D., Scordelis, A.C., "Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams", ACI Journal, v. 64 no. 3, March 1967.
- /5/ Kupfer, H., Hilsdorf, H., "Behavior of Concrete under Biaxial Stress", ACI Journ., v.66, n.8, Aug. 1969
- /6/ Darwin, D., Pecknold, D., "Nonlinear Biaxial Stress-Strain Law for Concrete" Journ. of the Struct. Div. ASCE, v. 103, no EM2, April 1977.
- /7/ Aoyama, H., Noguchi, H., "Mechanical Properties of Concrete under Load Cycles Idealizing Seismic Actions", CEB Bulletin, n.132.
- /8/ Takigucki, K., et al., "Two-Dimensional Nonlinear Analysis of Concrete Members by the Finite Element Method", Trans. of AIJ, n.189; NOV. 1971.
- /9/ Zienkiewicz, O.C., Valliapan, S., King, I., "Stress analysis of rock as a 'no tension' material", Geotechnique, 18, 1968.
- /10/ Page, A., "Finite Element Model for Masonry", Journ. of the Struct. Div. ASCE, v.104, n. ST8, Aug. 1978.
- /11/ Arya, S., Hegemier, G., "On nonlinear Response Predictions of Concrete Masonry Assemblies", Proc. of the North American Masonry Conference, 1978.
- /12/ Franklin, H.A., "Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Frames and Panels", University of California, Berkeley, Report Sesm 70-5. March. 1970.
- /13/ Valliapan, S., e Doolan, T.F., "Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete", Journ. of the Struct., ASCE, v.98, no. ST4, April 1972.
- /14/ Nam, C.H., e Salomon, C.G., "Finite Element Analysis of Concrete Beams", Journ. of the Struct. Div. ASCE, v.100, no. ST12, December 1974.
- /15/ Cedolin, L., e De Poli, S., "Finite Element Nonlinear Plane Stress Analysis of reinforced Concrete", Costruzioni in c.a., Studi e rendiconti, Pol. di Milano, 1976.
- /16/ Cervenka, V., e Gerstle, K.H., "Inelastic Analysis of Reinforced Concrete Panels", International Association for Bridge and Structural Engineering, vol. 31-II, 1971.
- /17/ Yuguzulu, O., e Schnobrich, W.C., "A Numerical Procedure for the Determination of the Behavior of a Shear Wall Frame System", ACI Journal, v.70, no.7, July 1973.
- /18/ Bernardini, A., Modena, C., e Vescovi, U., "Ricerca Sperimentale sui parametri di resistenza e deformabilità di murature in laterizio normale e alveolato", Costruire n°109, 1978; n°114, 1979.
- /19/ Bernardini, A., "Primi risultati sperimentali su muratura armata alveolata", Istituto di Costruzioni, Ponti e Strade dell'Università di Padova, 1980.
- /20/ Hinton, E., Owen, D.R., "Finite Element Programming", Accademic Press, London, 1977.